Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Seconda Prova in Itinere** **29 giugno 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità , sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Nel piano cartesiano si considerino i punti

$$O = (0,0), \quad A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Sia D il settore circolare convesso delimitato dai segmenti OA, OB e dall'arco AB della circonferenza con centro nell'origine e passante per A. Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D |x| \, dxdy$$

Soluzione.

Il settore circolare D è l'insieme dei punti del piano le cui coordinate polari (r, ϑ) soddisfano

$$0 \le r \le 1, \qquad \frac{\pi}{6} \le \vartheta \le \frac{5}{6}\pi$$

Poiché il settore D è simmetrico rispetto all'asse delle y e la funzione $f(x,y) = |x|$ soddisfa la proprietà di simmetria $f(x,y) = f(-x,y)$, si ha

$$\iint\limits_D |x| \, dxdy = 2 \iint\limits_{D_1} x \, dxdy$$

dove D_1 è la parte di D che sta nel primo quadrante, cioè l'insieme dei punti che soddisfano:

$$0 \le r \le 1, \qquad \frac{\pi}{6} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}$$

Calcolando l'integrale in coordinate polari, si ha:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D |x| \, dxdy &= 2 \iint\limits_{D_1} x \, dxdy \\
&= 2 \int_0^1 \Big(\int_{\pi/6}^{\pi/2} r^2 \cos\vartheta \, d\vartheta \Big) \, dr \\
&= 2 \Big(\int_0^1 r^2 \, dr \Big) \Big(\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta \Big) \\
&= 2 \cdot \Big[\frac{1}{3} r^3 \Big]_0^1 \cdot \Big[\sin\vartheta \Big]_{\pi/6}^{\pi/2} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

2. Determinare il valore massimo e il valore minimo della funzione $f(x,y) := xy$ sull'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 4y^2 = 12\}$.

Soluzione. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 12$, si tratta di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) &= \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{cases} \tag{1}$$

ossia

$$\begin{cases} y &= \lambda(2x+2y) \\ x &= \lambda(2x+8y) \\ x^2+2xy+4y^2-12 &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

Risolvendo tale sistema si trovano (in corrispondenza di $\lambda = -1/2$) i punti

$$P_1 = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}), \qquad P_2 = (-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$$

e (in corrispondenza di $\lambda = 1/6$) i punti

$$Q_1 = (2,1), \qquad Q_2 = (-2,-1)$$

Poiché la funzione f è continua e l'insieme E è chiuso e limitato, la funzione f assume su E sia il valore massimo che il valore minimo (Teorema di Weierstrass). Del resto, per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, i punti di E in cui f assume il valore massimo o il valore minimo vanno cercati tra i punti P_1, P_2, Q_1, Q_2 . Poiché

$$f(P_1) = f(P_2) = -6, \qquad f(Q_1) = f(Q_2) = 2,$$

possiamo concludere che il valore massimo di f su E è 2 e il valore minimo di f su E è -6 .

3. Si consideri la famiglia di campi vettoriali in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\mathbf{F}(x,y) := \Big(\frac{x+\alpha y}{2x^2+2y^2}\,,\,\frac{\beta x+y}{2x^2+2y^2}\Big)$$

per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(a) Dare la definizione di campo vettoriale irrotazionale.

(b) Per quali α, β il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

(c) Per gli α, β di cui al punto (b) calcolare $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, dove Γ è la circonferenza di centro nell'origine e raggio 1 orientata positivamente.

(d) Esistono valori di α, β per cui $\mathbf{F}$ può essere conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Per questi valori determinare, se possibile, un potenziale di $\mathbf{F}$. Per questi valori $\mathbf{F}$ è conservativo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Soluzione.

(b) Dette $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ le due componenti del campo vettoriale, il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se e solo se $Q_x = P_y$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcolando le derivate si vede che $Q_x = P_y$ è equivalente a

$$-2\beta x^2 + 2\beta y^2 - 4xy = 2\alpha x^2 - 2\alpha y^2 - 4xy$$

Questa uguaglianza vale per ogni $(x,y) \neq (0,0)$ se e solo se $\beta = -\alpha$. Quindi il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ se e solo se $\beta = -\alpha$.

(c) Si noti che l'integrale di linea non si può calcolare col teorema di Gauss-Green perché il campo non è definito nell'origine (in particolare, non è di classe C^1 in nessun aperto contenente il cerchio $x^2+y^2 \leq 1$). Per calcolarlo utilizziamo la parametrizzazione della circonferenza

$$(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Il vettore velocità è $(x'(t), y'(t)) = (-\sin(t), \cos(t))$ per cui

$$\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos(t)+\alpha\sin(t)}{2\cos^2(t)+2\sin^2(t)}(-\sin(t)) + \frac{-\alpha\cos(t)+\sin(t)}{2\cos^2(t)+2\sin^2(t)}(\cos(t)) \right) dt = -\alpha\pi$$

(d) Se il campo è conservativo nel piano meno l'origine, il campo dev'essere irrotazionale e il suo lavoro lungo la circonferenza Γ dev'essere nullo. Quindi per i punti (b) e (c) il campo può essere conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ solo se $\alpha = \beta = 0$. Se $\alpha = \beta = 0$, per verificare se il campo sia conservativo proviamo a calcolare il potenziale. Con metodi standard (questo è uno degli esempi del libro) si trova che

$$U(x,y) = \frac{1}{4}\ln(x^2+y^2)$$

è un potenziale del campo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, quindi per $\alpha = \beta = 0$ il campo è conservativo. (NB un altro potenziale è $\frac{1}{4}\ln(2x^2+2y^2)$, che differisce dal precedente per una costante).

4. Nel piano cartesiano si considerino i punti

$$O = (0,0), \quad A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Sia D il settore circolare convesso delimitato dai segmenti OA, OB e dall'arco AB della circonferenza con centro nell'origine e passante per A. Calcolare l'integrale

$$I = \iint_D |y| \, dxdy$$

Soluzione.

Il settore circolare D è l'insieme dei punti del piano le cui coordinate polari (r, ϑ) soddisfano

$$0 \leq r \leq 1, \qquad -\frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6}$$

Poiché il settore D è simmetrico rispetto all'asse delle x e la funzione $f(x,y) = |y|$ soddisfa la proprietà di simmetria $f(x,y) = f(x,-y)$, si ha

$$\iint\limits_D |y| \, dxdy = 2 \iint\limits_{D_1} y \, dxdy$$

dove D_1 è la parte di D che sta nel primo quadrante, cioè l'insieme dei punti che soddisfano:

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{6}$$

Calcolando l'integrale in coordinate polari, si ha:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D |y| \, dxdy &= 2 \iint\limits_{D_1} y \, dxdy \\
&= 2 \int_0^1 \Big(\int_0^{\pi/6} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \Big) \, dr \\
&= 2 \Big(\int_0^1 r^2 \, dr \Big) \Big(\int_0^{\pi/6} \sin\vartheta \, d\vartheta \Big) \\
&= 2 \cdot \Big[\frac{1}{3} r^3 \Big]_0^1 \cdot \Big[-\cos\vartheta \Big]_0^{\pi/6} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2 - \sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

5. Determinare il valore massimo e il valore minimo della funzione $f(x,y) := xy$ sull'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 2xy + y^2 = 48\}$.

Soluzione. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 48$, si tratta di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases} \tag{3}$$

ossia

$$\begin{cases} y & = & \lambda(8x + 2y) \\ x & = & \lambda(2x + 2y) \\ 4x^2 + 2xy + y^2 - 48 & = & 0 \end{cases} \tag{4}$$

Risolvendo tale sistema si trovano (in corrispondenza di $\lambda = -1/2$) i punti

$$P_1 = (2\sqrt{3}, -4\sqrt{3}), \qquad P_2 = (-2\sqrt{3}, 4\sqrt{3})$$

e (in corrispondenza di $\lambda = 1/6$) i punti

$$Q_1 = (2,4), \qquad Q_2 = (-2,-4)$$

Poiché la funzione f è continua e l'insieme E è compatto, la funzione f assume su E sia il valore massimo che il valore minimo (Teorema di Weierstrass). Del resto, per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, i punti di E in cui f assume il valore massimo o il valore minimo vanno cercati tra i punti P_1, P_2, Q_1, Q_2. Poiché

$$f(P_1) = f(P_2) = -24, \qquad f(Q_1) = f(Q_2) = 8,$$

possiamo concludere che il valore massimo di f su E è 8 e il valore minimo di f su E è -24.

6. Determinare il valore massimo e il valore minimo della funzione $f(x,y) := xy$ sull'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 4y^2 = 48\}$.

Soluzione. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = x^2+2xy+4y^2-48$, si tratta di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases} \tag{5}$$

ossia

$$\begin{cases} y & = & \lambda(2x+2y) \\ x & = & \lambda(2x+8y) \\ x^2+2xy+4y^2-48 & = & 0 \end{cases} \tag{6}$$

Risolvendo tale sistema si trovano (in corrispondenza di $\lambda = -1/2$) i punti

$$P_1 = (4\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \qquad P_2 = (-4\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

e (in corrispondenza di $\lambda = 1/6$) i punti

$$Q_1 = (4,2), \qquad Q_2 = (-4,-2)$$

Poiché la funzione f è continua e l'insieme E è compatto, la funzione f assume su E sia il valore massimo che il valore minimo (Teorema di Weierstrass). Del resto, per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, i punti di E in cui f assume il valore massimo o il valore minimo vanno cercati tra i punti P_1, P_2, Q_1, Q_2 . Poiché

$$f(P_1) = f(P_2) = -24, \qquad f(Q_1) = f(Q_2) = 8,$$

possiamo concludere che il valore massimo di f su E è 8 e il valore minimo di f su E è -24 .

7. Determinare il valore massimo e il valore minimo della funzione $f(x,y) := xy$ sull'insieme $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 2xy + y^2 = 12\}$.

Soluzione. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Posto $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = 4x^2 + 2xy + y^2 - 12$, si tratta di risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) & = & \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{cases} \tag{7}$$

ossia

$$\begin{cases} y & = & \lambda(8x + 2y) \\ x & = & \lambda(2x + 2y) \\ 4x^2 + 2xy + y^2 - 12 & = & 0 \end{cases} \tag{8}$$

Risolvendo tale sistema si trovano (in corrispondenza di $\lambda = -1/2$) i punti

$$P_1 = (\sqrt{3}, -2\sqrt{3}), \qquad P_2 = (-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$$

e (in corrispondenza di $\lambda = 1/6$) i punti

$$Q_1 = (1, 2), \qquad Q_2 = (-1, -2)$$

Poiché la funzione f è continua e l'insieme E è compatto, la funzione f assume su E sia il valore massimo che il valore minimo (Teorema di Weierstrass). Del resto, per il teorema sui moltiplicatori di Lagrange, i punti di E in cui f assume il valore massimo o il valore minimo vanno cercati tra i punti P_1, P_2, Q_1, Q_2 . Poiché

$$f(P_1) = f(P_2) = -6, \qquad f(Q_1) = f(Q_2) = 2,$$

possiamo concludere che il valore massimo di f su E è 2 e il valore minimo di f su E è -6 .