Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo appello** **13 luglio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. a) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

si trovino, se possibile, una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$.

b) La funzione (forma quadratica)

$$q(x, y, z) = 2x^2 - 4xy + 9y^2 + 4yz + 2z^2$$

ha nell'origine $(0, 0, 0)$ un punto di massimo assoluto, di minimo assoluto o di sella? Giustificare la risposta.

2. In $\mathbb{R}^3$, si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -xy\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{k}$$

Sia S la porzione della superficie di equazione

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3 - x^2 - y^2\}$$

la cui proiezione sul piano x, y è il disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Si fissi su S una orientazione mediante un versore normale $\mathbf{n}$, in modo tale che nel punto $(0, 0, 3) \in S$ il versore $\mathbf{n}$ sia diretto come $\mathbf{k}$.

a) Enunciare il teorema di Stokes nello spazio.

b) Calcolare il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso la superficie S , orientata con il versore normale $\mathbf{n}$ fissato.

c) Trovare l'area di S .

3. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^6 \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nell'origine;

b) Stabilire se f ammette derivate parziali prime nell'origine;

c) Stabilire se f è differenziabile nell'origine;

d) Supponiamo che una funzione sia differenziabile in un punto. Ciò garantisce che le derivate parziali prime, in tale punto, siano continue? Giustificare la risposta.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo appello** **13 luglio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. a) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

si trovino, se possibile, una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$.

b) La funzione (forma quadratica)

$$q(x, y, z) = 9x^2 + 4xy + 2y^2 - 4xz + 2z^2$$

ha nell'origine $(0, 0, 0)$ un punto di massimo assoluto, di minimo assoluto o di sella? Giustificare la risposta.

2. In $\mathbb{R}^3$, si consideri il campo vettoriale
$$\mathbf{F}(x,y,z) = -xy\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{k}$$
Sia S la porzione della superficie di equazione
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2\}$$
la cui proiezione sul piano x, y è il disco
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$
Si fissi su S una orientazione mediante un versore normale $\mathbf{n}$, in modo tale che nel punto $(0,0,4) \in S$ il versore $\mathbf{n}$ sia diretto come $\mathbf{k}$.

a) Enunciare il teorema di Stokes nello spazio.

b) Calcolare il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso la superficie S , orientata con il versore normale $\mathbf{n}$ fissato.

c) Trovare l'area di S .

3. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^7 \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nell'origine;

b) Stabilire se f ammette derivate parziali prime nell'origine;

c) Stabilire se f è differenziabile nell'origine;

d) Supponiamo che una funzione sia differenziabile in un punto. Ciò garantisce che le derivate parziali prime, in tale punto, siano continue? Giustificare la risposta.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo appello** **13 luglio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. a) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -9 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

si trovino, se possibile, una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$.

b) La funzione (forma quadratica)

$$q(x, y, z) = -2x^2 + 4xy - 9y^2 - 4yz - 2z^2$$

ha nell'origine $(0, 0, 0)$ un punto di massimo assoluto, di minimo assoluto o di sella? Giustificare la risposta.

2. In $\mathbb{R}^3$, si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = -xy\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{k}$$

Sia S la porzione della superficie di equazione

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 5 - x^2 - y^2\}$$

la cui proiezione sul piano x, y è il disco

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Si fissi su S una orientazione mediante un versore normale $\mathbf{n}$, in modo tale che nel punto $(0,0,5) \in S$ il versore $\mathbf{n}$ sia diretto come $\mathbf{k}$.

a) Enunciare il teorema di Stokes nello spazio.

b) Calcolare il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso la superficie S , orientata con il versore normale $\mathbf{n}$ fissato.

c) Trovare l'area di S .

3. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^8 \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nell'origine;

b) Stabilire se f ammette derivate parziali prime nell'origine;

c) Stabilire se f è differenziabile nell'origine;

d) Supponiamo che una funzione sia differenziabile in un punto. Ciò garantisce che le derivate parziali prime, in tale punto, siano continue? Giustificare la risposta.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Primo appello** **13 luglio 2010**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. a) Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

si trovino, se possibile, una matrice ortogonale $\mathbf{Q}$ e una matrice diagonale $\mathbf{D}$ tali che $\mathbf{D} = \mathbf{Q}^T \mathbf{A} \mathbf{Q}$.

b) La funzione (forma quadratica)

$$q(x, y, z) = -9x^2 - 4xy - 2y^2 + 4xz - 2z^2$$

ha nell'origine $(0, 0, 0)$ un punto di massimo assoluto, di minimo assoluto o di sella? Giustificare la risposta.

2. In $\mathbb{R}^3$, si consideri il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -xy\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{k}$$

Sia S la porzione della superficie di equazione

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \, z = 6 - x^2 - y^2\}$$

la cui proiezione sul piano x, y è il disco

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Si fissi su S una orientazione mediante un versore normale $\mathbf{n}$, in modo tale che nel punto $(0, 0, 6) \in S$ il versore $\mathbf{n}$ sia diretto come $\mathbf{k}$.

a) Enunciare il teorema di Stokes nello spazio.

b) Calcolare il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso la superficie S , orientata con il versore normale $\mathbf{n}$ fissato.

c) Trovare l'area di S .

3. Sia data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x^9 \sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Stabilire se f è continua nell'origine;

b) Stabilire se f ammette derivate parziali prime nell'origine;

c) Stabilire se f è differenziabile nell'origine;

d) Supponiamo che una funzione sia differenziabile in un punto. Ciò garantisce che le derivate parziali prime, in tale punto, siano continue? Giustificare la risposta.