

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 Docente:		8 settembre 2010
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da

$$T(x, y, z) = (x + 3z, 2y, 3x + z)$$

Denotiamo con A la matrice che rappresenta T rispetto alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

- Trovare la matrice A .
- L'operatore T è suriettivo?
- Trovare una base per ogni autospazio di A , specificando il relativo autovalore.
- Trovare una matrice *ortogonale* Q , se esiste, per la quale $Q^{-1}AQ$ sia diagonale e scrivere la matrice $Q^{-1}AQ$.

2. (a) Enunciare il teorema della divergenza nello spazio.

(b) Calcolare il flusso uscente $\Phi(\mathbf{G})$ del campo vettoriale $\mathbf{G} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ attraverso la superficie bordo del solido

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T, 0 \leq z \leq 4\}$$

dove T , in coordinate polari, è dato da

$$T = \{(\theta, \rho) : -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \cos(2\theta)\}.$$

3. Si consideri la famiglia di campi vettoriali in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\mathbf{F}_\alpha(x, y) := \left(\frac{x + \alpha y}{x^2 + y^2}, \frac{x + y}{x^2 + y^2} \right)$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (a) Dare la definizione di campo vettoriale *irrotazionale* su un aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$.
- (b) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo tale che \mathbf{F}_α sia irrotazionale in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- (c) Sia \mathbf{F} il campo irrotazionale determinato in (b). Calcolare $\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, dove Γ è la circonferenza di centro nell'origine e raggio 1 orientata in senso antiorario.
- (d) Il campo vettoriale \mathbf{F} è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
- (e) Il campo vettoriale \mathbf{F} è conservativo nel semipiano $y > 0$? In caso affermativo, determinare un potenziale.