Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3. \end{cases}$$

(a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

(b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

(c) Si dia la definizione di funzione iniettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è iniettiva?

Soluzione

(a) La matrice che rappresenta T rispetto alla base considerata è la matrice le cui colonne sono le componenti, rispetto alla base stessa, dei trasformati dei vettori della base, cioè $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) La dimensione dell'immagine è il rango di A che vale 3 essendo $\det A \neq 0$. Per il teorema di nullità più rango la dimensione del nucleo è 0.

(c) Una funzione è iniettiva se elementi distinti del dominio hanno immagini distinte. L'applicazione T è iniettiva poichè $\mathrm{Ker}\,(T) = \{\mathbf{0}\}$.

(*Scrivere le risposte sotto ogni domanda. Riportare i conti sul retro del foglio*).

Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

(a) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A.

(b) Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A? Se esistono, se ne trovi una.

(c) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se* $\mathbf{u}$ *è una qualunque matrice reale* $n \times 1$, *allora gli autovalori della matrice* $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ *sono tutti reali*". $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

Soluzione

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ 1] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. A è simmetrica dunque è diagonalizzabile per il teorema spettrale. Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione $\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$ e sono 0 e 2. Una matrice diagonale simile ad A è $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Gli autovettori relativi all'autovalore 0 sono le soluzioni del sistema $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cioè dell'equazione $x + y = 0$. Gli autovettori relativi all'autovalore 2 sono le soluzioni del sistema $(A - 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, cioè dell'equazione $x - y = 0$. Una base ortonormale formata da autovettori è: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1); \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) \right\}$.

(c) L'affermazione è vera infatti la matrice $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ è simmetrica come si può vedere calcolandola esplicitamente: se $\mathbf{u} = [x_1, ..., x_n]^{\mathrm{T}}$, si ha che $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & ... & x_1x_n \\ x_1x_2 & x_2^2 & ... & x_2x_n \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ x_1x_n & x_2x_n & ... & x_n^2 \end{bmatrix}$. Oppure, osservando che $(AB)^T = B^T A^T$, si ha che $(\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}})^T = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$, il che dimostra che la matrice $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ è simmetrica.

(a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

(b) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$z''(x) - 10z'(x) + 26z(x) = 0.$$

(c) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) - 10y'(x) + 26y(x) = -5e^{5x} + 26x.$$

Soluzione

(a) Vedi libri di testo.

(b) L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 10\lambda + 26 = 0$$

che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = 5 \pm i$. L'integrale generale è quindi

$$z(x) = e^{5x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Dal metodo di somiglianza la soluzione deve avere la forma

$$y_0(x) = ae^{5x} + bx + c$$

e sostituendo nell'equazione si ricava $a = -5,\ b = 1,\ c = \dfrac{5}{13}$, da cui l'integrale generale

$$y(x) = e^{5x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 5e^{5x} + x + \frac{5}{13}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3. \end{cases}$$

   (a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

   (b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

   (c) Si dia la definizione di funzione suriettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è suriettiva?

2. (*Scrivere le risposte sotto ogni domanda. Riportare i conti sul retro del foglio*).

Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

(a) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A.

(b) Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A? Se esistono, se ne trovi una.

(c) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se* $\mathbf{u}$ *è una qualunque matrice reale* $n \times 1$, *allora autovettori della matrice* $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ *relativi a autovalori distinti sono ortogonali.*" $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

3. (a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

(b) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$z''(x) - 6z'(x) + 10z(x) = 0.$$

(c) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) - 6y'(x) + 10y(x) = 3e^{3x} + 10x.$$

Soluzione

(a) Vedi libri di testo.

(b) L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = 3 \pm i$. L'integrale generale è quindi

$$z(x) = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Dal metodo di somiglianza la soluzione deve avere la forma

$$y_0(x) = ae^{3x} + bx + c$$

e sostituendo nell'equazione si ricava $a = 3,\ b = 1,\ c = \dfrac{3}{5}$, da cui l'integrale generale

$$y(x) = e^{3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 3e^{3x} + x + \frac{3}{5}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 3\mathbf{b}_3. \end{cases}$$

(a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

(b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

(c) Si dia la definizione di funzione iniettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è iniettiva?

2. (*Scrivere le risposte sotto ogni domanda. Riportare i conti sul retro del foglio*).

Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

(a) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A .

(b) Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A ? Se esistono, se ne trovi una.

(c) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se* $\mathbf{u}$ *è una qualunque matrice reale* $n \times 1$, *allora gli autovalori della matrice* $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ *sono tutti reali*". $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

3. (a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.
   (b) Si determini l'integrale generale dell'equazione
$$z''(x) - 8z'(x) + 17z(x) = 0.$$
   (c) Si determini l'integrale generale dell'equazione
$$y''(x) - 8y'(x) + 17y(x) = 4e^{4x} + 17x.$$

Soluzione

(a) Vedi libri di testo.

(b) L'equazione caratteristica associata è
$$\lambda^2 - 8\lambda + 17 = 0$$
che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = 4 \pm i$. L'integrale generale è quindi
$$z(x) = e^{4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Dal metodo di somiglianza la soluzione deve avere la forma
$$y_0(x) = ae^{4x} + bx + c$$
e sostituendo nell'equazione si ricava $a = 4,\ b = 1,\ c = \dfrac{8}{17}$, da cui l'integrale generale
$$y(x) = e^{4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4e^{4x} + x + \frac{8}{17}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 4\mathbf{b}_3. \end{cases}$$

(a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

(b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

(c) Si dia la definizione di funzione suriettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è suriettiva?

2. (*Scrivere le risposte sotto ogni domanda. Riportare i conti sul retro del foglio*).

Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

(a) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A.

(b) Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A? Se esistono, se ne trovi una.

(c) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se $\mathbf{u}$ è una qualunque matrice reale $n \times 1$, allora autovettori della matrice $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ relativi a autovalori distinti sono ortogonali.*". $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

3. (a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

(b) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$z''(x) - 4z'(x) + 5z(x) = 0.$$

(c) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) - 4y'(x) + 5y(x) = 2e^{2x} + 5x.$$

Soluzione

(a) Vedi libri di testo.

(b) L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$

che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. L'integrale generale è quindi

$$z(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Dal metodo di somiglianza la soluzione deve avere la forma

$$y_0(x) = ae^{2x} + bx + c$$

e sostituendo nell'equazione si ricava $a = 2,\ b = 1,\ c = \frac{4}{5}$, da cui l'integrale generale

$$y(x) = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^{2x} + x + \frac{4}{5}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3. \end{cases}$$

   (a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

   (b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

   (c) Si dia la definizione di funzione iniettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è iniettiva?

2. (*Scrivere le risposte sotto ogni domanda. Riportare i conti sul retro del foglio*).

Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

(a) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A.

(b) Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A? Se esistono, se ne trovi una.

(c) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se* $\mathbf{u}$ *è una qualunque matrice reale* $n \times 1$ *, allora la matrice* $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ *è diagonalizzabile.*" $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

3. (a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

   (b) Si determini l'integrale generale di
$$z''(x) + 8z'(x) + 17z(x) = 0.$$

   (c) Si determini l'integrale generale dell'equazione
$$y''(x) + 8y'(x) + 17y(x) = 4e^{-4x} - 17x.$$

Soluzione

(a) Vedi libri di testo.

(b) L'equazione caratteristica associata è
$$\lambda^2 + 8\lambda + 17 = 0$$
che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -4 \pm i$. L'integrale generale è quindi
$$z(x) = e^{-4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Dal metodo di somiglianza la soluzione deve avere la forma
$$y_0(x) = ae^{-4x} + bx + c$$
e sostituendo nell'equazione si ricava $a = 4,\ b = -1,\ c = \dfrac{8}{17}$, da cui l'integrale generale
$$y(x) = e^{-4x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4e^{-4x} - x + \frac{8}{17}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3. \end{cases}$$

   (a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

   (b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

   (c) Si dia la definizione di funzione suriettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è suriettiva?

2. (*Scrivere le risposte sotto ogni domanda. Riportare i conti sul retro del foglio*).

Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

(a) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A .

(b) Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A ? Se esistono, se ne trovi una.

(c) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se* $\mathbf{u}$ *è una qualunque matrice reale* $n \times 1$, *allora esiste una base di* $\mathbb{R}^n$ *costituita da autovettori della matrice* $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$." $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

3. (a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

   (b) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$z''(x) + 6z'(x) + 10z(x) = 0.$$

   (c) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) + 6y'(x) + 10y(x) = -3e^{-3x} - 5x.$$

Soluzione

(a) Vedi libri di testo.

(b) L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$$

che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -3 \pm i$. L'integrale generale è quindi

$$z(x) = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Dal metodo di somiglianza la soluzione deve avere la forma

$$y_0(x) = ae^{-3x} + bx + c$$

e sostituendo nell'equazione si ricava $a = -3,\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{3}{10}$, da cui l'integrale generale

$$y(x) = e^{-3x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 3e^{-3x} - \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{10}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 - 5\mathbf{b}_3. \end{cases}$$

   (a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

   (b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

   (c) Si dia la definizione di funzione iniettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è iniettiva?

2. (*Scrivere le risposte sotto ogni domanda. Riportare i conti sul retro del foglio*).

Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

(a) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A.

(b) Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A? Se esistono, se ne trovi una.

(c) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se* $\mathbf{u}$ *è una qualunque matrice reale* $n \times 1$, *allora la matrice* $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ *è diagonalizzabile.*" $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

3. (a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

   (b) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$z''(x) + 4z'(x) + 5z(x) = 0.$$

   (c) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = -2e^{-2x} + 2x.$$

Soluzione

(a) Vedi libri di testo.

(b) L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -2 \pm i$. L'integrale generale è quindi

$$z(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Dal metodo di somiglianza la soluzione deve avere la forma

$$y_0(x) = ae^{-2x} + bx + c$$

e sostituendo nell'equazione si ricava $a = -2,\ b = -1,\ c = \dfrac{8}{17}$, da cui l'integrale generale

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 4e^{-2x} - x + \frac{8}{17}.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**Prima Prova in Itinere** **2 maggio 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$, e sia $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T}(\mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_2) = 2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{T}(\mathbf{b}_3) = 3\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3. \end{cases}$$

   (a) Si scriva la matrice che rappresenta $\mathbf{T}$ rispetto alla base $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

   (b) Si calcoli la dimensione del nucleo e dell'immagine di $\mathbf{T}$.

   (c) Si dia la definizione di funzione suriettiva. L'applicazione $\mathbf{T}$ è suriettiva?

2. (*Scrivere le risposte sotto ogni domanda. Riportare i conti sul retro del foglio*).

Sia $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}$ (matrice 2×1) e sia $A = \mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$ (prodotto di matrici).

(a) Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, giustificando la risposta. Se lo è, si scriva una matrice diagonale simile alla matrice A.

(b) Esistono basi *ortonormali* di $\mathbb{R}^2$ formate da autovettori di A? Se esistono, se ne trovi una.

(c) Si dica se la seguente affermazione è vera o falsa: "*Se* $\mathbf{u}$ *è una qualunque matrice reale* $n \times 1$, *allora esiste una base di* $\mathbb{R}^n$ *costituita da autovettori della matrice* $\mathbf{u}\,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}$." $\boxed{}$ Giustificare la risposta.

3. (a) Si enunci il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

   (b) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$z''(x) + 10z'(x) + 26z(x) = 0.$$

   (c) Si determini l'integrale generale dell'equazione

$$y''(x) + 10y'(x) + 26y(x) = -2e^{-5x} + 13x.$$

Soluzione

(a) Vedi libri di testo.

(b) L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 10\lambda + 26 = 0$$

che ha le due soluzioni complesse coniugate $\lambda_{1,2} = -5 \pm i$. L'integrale generale è quindi

$$z(x) = e^{-5x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

(c) Bisogna determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Dal metodo di somiglianza la soluzione deve avere la forma

$$y_0(x) = ae^{-5x} + bx + c$$

e sostituendo nell'equazione si ricava $a = -2,\ b = \frac{1}{2},\ c = -\frac{5}{26}$, da cui l'integrale generale

$$y(x) = e^{-5x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 2e^{-5x} + \frac{1}{2}x - \frac{5}{26}.$$