1. Sia $f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-y^2}$. Determinare gli estremi assoluti di f nel triangolo chiuso di vertici $(0,0), (a,a), (0,2a)$ ($a \geq 1$).

Soluzione La funzione è continua i ogni punto del triangolo, che è chiuso e limitato; per il teorema di Weierstrass, la funzione ammette massimo e minimo assoluto sul triangolo. Poniamo $O = (0,0)$, $A = (a,a)$, $B = (0,2a)$. Il triangolo giace nel primo quadrante del piano cartesiano, e $f(x,y) > 0$ per ogni (x,y) del primo quadrante, con l'eccezione dell'origine: nell'origine la funzione vale 0 , per cui l'origine è l'unico punto di minimo assoluto di $f(x,y)$ nel triangolo, e 0 è il minimo assoluto della funzione nel triangolo. Per determinare il massimo assoluto, cerchiamo i punti di massimo della funzione sulla frontiera del triangolo e all'interno del triangolo

Il lato OA del triangolo giace sulla bisettrice del primo quadrante $y = x$, e i suoi punti hanno coordinate (x,x) al variare di x tra 0 e a . La funzione f ristretta al segmento OA è $g(x) = f(x,x) = 2xe^{-2x^2}$, la cui derivata è

$$g'(x) = 2e^{-2x^2}(1-4x^2)$$

Nell'intervallo $[0,a]$ la derivata $g'(x)$ è positiva se $0 \leq x < 1/2$, nulla se $x = 1/2$, e negativa per $x > 1/2$. Quindi il punto $P(1/2,1/2)$ è l'unico punto di massimo vincolato di $f(x,y)$ sul segmento OA . Il valore della funzione in P è

$$f(1/2,1/2) = e^{-1/4-1/4} = e^{-1/2}$$

Il lato OB del triangolo giace sull'asse y , e i suoi punti hanno coordinate $(0,y)$ al variare di y tra 0 e $2a$. La funzione f ristretta al segmento OB è $h((y) = f(0,y) = ye^{-y^2}$, la cui derivata è

$$h'(y) = e^{-y^2}(1-2y^2)$$

Da questo segue che sull'asse y , la funzione ha un unico punto di massimo vincolato $Q = (0, 1/\sqrt{2})$. Il valore della funzione in Q è

$$f(Q) = f(0,1/\sqrt{2}) = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}} < e^{-1/2} = f(P).$$

Il lato AB del triangolo giace sulla retta di equazione $x + y = 2a$, e i suoi punti hanno coordinate $(x, 2a-x)$ al variare di x tra 0 e a . La funzione f ristretta al segmento AB è

$$k(x) = f(x, 2a-x) = 2ae^{-x^2-(2a-x)^2} = 2ae^{-2x^2+4ax-4a^2},$$

la cui derivata è

$$k'(x) = 2a(-4x+4a)e^{-2x^2+4ax-4a^2}$$

Nell'intervallo $(0,a)$ la derivata $k'(x)$ è positiva, quindi sul segmento AB la funzione $k(x)$ ha il suo massimo nel vertice $A = (a,a)$. Siccome A appartiene anche al segmento OA e P è l'unico punto di massimo di f su OA , concludiamo che P è l'unico punto di massimo di f sul bordo del triangolo.

Cerchiamo eventuali punti critici all'interno del triangolo: imponendo

$$\begin{cases} 0 = f_x(x,y) = e^{-x^2-y^2}(1-2x(x+y)) \\ 0 = f_y(x,y) = e^{-x^2-y^2}(1-2y(x+y)) \end{cases}$$

troviamo

$$\begin{cases} x(x+y) = y(x+y) \\ 1 = 2x(x+y)) \end{cases}$$

All'interno del triangolo si ha $x + y > 0$, per cui dalla prima equazione si ricava $x = y$, e poi dalla seconda $1 = 4x^2$, quindi $x = 1/2$ (perché $x > 0$ all'interno del triangolo) e $y = 1/2$: l'unico punto critico di $f(x,y)$ nel primo quadrante è il punto $P = (1/2, 1/2)$ che si trova sul bordo del triangolo. Quindi la funzione non ha punti critici all'interno del triangolo, e assume il suo valore massimo assoluto sul bordo del triangolo, necessariamente nel punto P . Il massimo assoluto della funzione sul triangolo è perciò $f(P) = e^{-1/2}$.

2. Nel piano sia γ il bordo, orientato in senso antiorario, del parallelogramma di vertici $(2/3, 0), (5/3, 0), (1, 1), (2, 1)$. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x, y) = \frac{y}{x^2}\overrightarrow{i} + \frac{3}{x}\overrightarrow{j}$ lungo γ. Suggerimento: utilizzare il teorema di Gauss-Green per trasformare l'integrale di linea in un integrale doppio.

Soluzione Il parallelogramma D in questione è un dominio x-semplice (disegnarlo!), ed è delimitato dalle rette di equazione $y = 0$, $y = 1$, $y = 3x - 2$ e $y = 3x - 5$:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq 1, \ \frac{y+2}{3} \leq x \leq \frac{y+5}{3}\right\}$$

Per il teorema di Gauss Green

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(-\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) \, dxdy.$$

Ora

$$\iint_D \frac{1}{x^2} \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{y+2}{3}}^{\frac{y+5}{3}} \frac{1}{x^2} \, dx\right) dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{y+2} - \frac{3}{y+5}\right) \, dy = 3 \, \log(5/4)$$

Perciò

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -4 \iint_D \frac{1}{x^2} \, dxdy = -12 \, \log(5/4)$$

3. Nel piano sia γ il bordo, orientato in senso antiorario, del parallelogramma di vertici $(1,1),(2,1),(1/2,2),(3/2,2)$. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{y}{x^2}\overrightarrow{i} + \frac{4}{x}\overrightarrow{j}$ lungo γ. Suggerimento: utilizzare il teorema di Gauss-Green per trasformare l'integrale di linea in un integrale doppio.

Soluzione Il parallelogramma D in questione è un dominio x-semplice (disegnarlo!), ed è delimitato dalle rette di equazione $y=1$, $y=2$, $y=3-2x$ e $y=5-2x$:

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le y \le 2, \ \frac{3-y}{2} \le x \le \frac{5-y}{2} \right\}$$

Per il teorema di Gauss Green

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(-\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) dxdy.$$

Ora

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\, dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{3-y}{2}}^{\frac{5-y}{2}} \frac{1}{x^2}\, dx \right) dy = \int_1^2 \left(\frac{2}{3-y} - \frac{2}{5-y} \right) dy = 2\ \log(3/2)$$

Perciò

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = -5 \iint_D \frac{1}{x^2}\, dxdy = -10\ \log(3/2)$$

4. Nel piano sia γ il bordo, orientato in senso antiorario, del parallelogramma di vertici $(0, 2/3), (0, 5/3), (1, 1), (1, 2)$. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x, y) = \frac{1}{y}\overrightarrow{i} + \frac{5x}{y^2}\overrightarrow{j}$ lungo γ. Suggerimento: utilizzare il teorema di Gauss-Green per trasformare l'integrale di linea in un integrale doppio.

Soluzione Il parallelogramma D in questione è un dominio y-semplice (disegnarlo!), ed è delimitato dalle rette di equazione $x = 0$, $x = 1$, $y = \frac{x+2}{3}$ e $y = \frac{x+5}{3}$:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ \frac{x+2}{3} \le y \le \frac{x+5}{3} \right\}$$

Per il teorema di Gauss Green

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(\frac{5}{y^2} + \frac{1}{y^2} \right) dxdy.$$

Ora

$$\iint_D \frac{1}{y^2}\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{\frac{x+2}{3}}^{\frac{x+5}{3}} \frac{1}{y^2}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{x+2} - \frac{3}{x+5} \right) dx = 3 \log(5/4)$$

Perciò

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 6 \iint_D \frac{1}{y^2}\, dxdy = 18 \log(5/4)$$

5. Nel piano sia γ il bordo, orientato in senso antiorario, del parallelogramma di vertici $(1,1),(1,2),(2,1/2),(2,3/2)$. Si calcoli il lavoro del campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{1}{y}\overrightarrow{i} + \frac{2x}{y^2}\overrightarrow{j}$ lungo γ. Suggerimento: utilizzare il teorema di Gauss-Green per trasformare l'integrale di linea in un integrale doppio.

Soluzione Il parallelogramma D in questione è un dominio y-semplice (disegnarlo!), ed è delimitato dalle rette di equazione $x = 1$, $x = 2$, $y = \frac{3-x}{2}$ e $y = \frac{5-x}{2}$:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \le x \le 2, \; \frac{3-x}{2} \le y \le \frac{5-x}{2}\right\}$$

Per il teorema di Gauss Green

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_D \left(\frac{2}{y^2} + \frac{1}{y^2}\right) \, dydx.$$

Ora

$$\iint_D \frac{1}{y^2} \, dxdy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{3-x}{2}}^{\frac{5-x}{2}} \frac{1}{y^2} \, dy\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{2}{3-x} - \frac{2}{5-x}\right) \, dx = 2 \, \log(3/2)$$

Perciò

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 3 \iint_D \frac{1}{y^2} \, dxdy = 6 \, \log(3/2)$$

6. Si condideri campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}\overrightarrow{i} + \left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+1\right)\overrightarrow{j}$

a) Il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y)$ è conservativo in $\mathbf{R^2}$? Motivare la risposta. Se lo è, se ne trovi un potenziale.

b) Si calcoli il lavoro di $\overrightarrow{F}(x,y)$ lungo l'arco di curva $x^2+9y^2=1$ compreso nel secondo quadrante e percorso in verso antiorario.

Soluzione

a) Il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso, dunque ammette potenziale in $\mathbb{R}^2$.

Il potenziale é una funzione $U(x,y)$ tale che $U_x = \dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, $U_y = \dfrac{e^y}{1+x^2}+1$; si ha che: $U(x,y) = \int\left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy + g(x) = \dfrac{e^y}{1+x^2}+y+g(x)$; derivando rispetto a x si trova che $U_x = \dfrac{-2xe^y}{(1+x^2)^2}+g'(x) = \dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}$, da cui $g(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$. Un potenziale è $U(x,y) = \dfrac{e^y}{1+x^2}+y-\dfrac{1}{1+x^2}$.

b) L'arco di curva è un ellisse con punto iniziale $A = \left(0,\dfrac{1}{3}\right)$ e punto finale $B=(-1,0)$. Il lavoro è pari a $U(B)-U(A) = \dfrac{2}{3}-\sqrt[3]{e}$.

7. Si consideri il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{e^{-x}}{1+y^2}\overrightarrow{i} + \dfrac{2y(1+e^{-x})}{(1+y^2)^2}\overrightarrow{j}$.

a) Il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y)$ è conservativo in $\mathbf{R^2}$? Motivare la risposta. Se lo è, se ne trovi un potenziale.

b) Si calcoli il lavoro di $\overrightarrow{F}(x,y)$ lungo l'arco di curva $9x^2 + y^2 = 1$ compreso nel quarto quadrante e percorso in verso antiorario.

Soluzione

a) Il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso, dunque ammette potenziale in $\mathbb{R}^2$.

Il potenziale é una funzione $U(x,y)$ tale che $U_x = \dfrac{e^{-x}}{1+y^2}$, $U_y = \dfrac{2y(1+e^{-x})}{(1+y^2)^2}$; si ha che: $U(x,y) = \displaystyle\int \frac{e^{-x}}{1+y^2}dx + g(y) = -\frac{e^{-x}}{1+y^2} + g(y)$; derivando rispetto a y si trova che $U_y = \dfrac{2ye^{-x}}{(1+y^2)^2} + g'(y) = \dfrac{2y(1+e^{-x})}{(1+y^2)^2}$, da cui $g(y) = -\dfrac{1}{1+y^2}$. Un potenziale è $U(x,y) = -\dfrac{e^{-x}}{1+y^2} - \dfrac{1}{1+y^2}$.

b) L'arco di curva è un ellisse con punto iniziale $A = (0,-1)$ e punto finale $B = \left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$. Il lavoro è pari a $U(B) - U(A) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

8. Si consideri il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = \dfrac{2x(1+e^{-y})}{(1+x^2)^2}\overrightarrow{i} + \dfrac{e^{-y}}{1+x^2}\overrightarrow{j}$

a) Il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y)$ è conservativo in $\mathbf{R^2}$? Motivare la risposta. Se lo è, se ne trovi un potenziale.

b) Si calcoli il lavoro di $\overrightarrow{F}(x,y)$ lungo l'arco di curva $x^2+4y^2=4$ compreso nel terzo quadrante e percorso in verso orario.

Soluzione

a) Il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso, dunque ammette potenziale in $\mathbb{R}^2$.

Il potenziale é una funzione $U(x,y)$ tale che $U_x = \dfrac{2x(1+e^{-y})}{(1+x^2)^2}$, $U_y = \dfrac{e^{-y}}{1+x^2}$; si ha che: $U(x,y) = \displaystyle\int \frac{e^{-y}}{1+x^2}dy + g(x) = -\frac{e^{-y}}{1+x^2} + g(x)$; derivando rispetto a x si trova che $U_x = \dfrac{2xe^{-y}}{(1+x^2)^2} + g'(x) = \dfrac{e^{-y}}{1+x^2}$, da cui $g(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$. Un potenziale è $U(x,y) = -\dfrac{e^{-y}}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2}$.

b) L'arco di curva è un ellisse con punto iniziale $A=(0,-1)$ e punto finale $B=(-2,0)$. Il lavoro è pari a $U(B)-U(A) = e + \dfrac{3}{5}$.

9. Si consideri il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{e^x}{1+y^2}+1\right)\overrightarrow{i} + \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}\overrightarrow{j}$.

a) Il campo vettoriale $\overrightarrow{F}(x,y)$ è conservativo in $\mathbf{R^2}$? Motivare la risposta. Se lo è, se ne trovi un potenziale.

b) Si calcoli il lavoro di $\overrightarrow{F}(x,y)$ lungo l'arco di curva $4x^2+y^2=4$ compreso nel primo quadrante e percorso in verso orario.

Soluzione

a) Il campo è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso, dunque ammette potenziale in $\mathbb{R}^2$.

Il potenziale é una funzione $U(x,y)$ tale che $U_x = \frac{e^x}{1+y^2}+1$, $U_y = \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}$; si ha che: $U(x,y) = \int\left(\frac{e^x}{1+y^2}+1\right)dx + g(y) = \frac{e^x}{1+y^2}+x+g(y)$; derivando rispetto a y si trova che $U_y = -\frac{2ye^x}{(1+y^2)^2}+g'(y) = \frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}$, da cui $g(y) = -\frac{1}{1+y^2}$. Un potenziale è $U(x,y) = \frac{e^x}{1+y^2}+x-\frac{1}{1+y^2}$.

b) L'arco di curva è un ellisse con punto iniziale $A=(0,2)$ e punto finale $B=(1,0)$. Il lavoro è pari a $U(B)-U(A)=e$.