

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

<b>Analisi e geometria 2</b> <b>Docente:</b>		<b>I Appello</b> <b>18 luglio 2011</b>
<b>Cognome:</b>	<b>Nome:</b>	<b>Matricola:</b>

• **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'applicazione lineare rappresentata, rispetto alla base canonica  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ \alpha & -3\alpha & 0 \end{pmatrix}, \text{ dove } \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Determinare  $\alpha$  in modo che l'equazione  $L(\mathbf{v}) - 2\mathbf{v} = 0$  abbia anche soluzioni non nulle.
- Per il valore di  $\alpha$  trovato, determinare una base per  $\text{Ker}(L)$  e  $\text{Im}(L)$ .
- Per il valore di  $\alpha$  trovato, stabilire se la matrice è diagonalizzabile e, in caso affermativo, scrivere una matrice diagonale  $D$  simile ad  $A$  e una matrice invertibile  $S$  per la quale  $S^{-1}AS = D$ .

**Soluzione:** L'equazione ha soluzione non banale se 2 è autovalore di  $A$  e dunque se  $\det(A - 2I) = 0$  da cui  $\alpha = 1$  ed il relativo autovettore è  $(2, 0, 1)$ . Inoltre, poiché il rango di  $A$ ,  $rk(A) = 2$  si ha che  $\langle (2, -1, 1), (0, 2, 0) \rangle$  (due colonne linearmente indipendenti) fornisce una base per  $\text{Im}(L)$ . Per il teorema della nullità più rango la dimensione di  $\text{Ker}(L) = 1$  ed una base è fornita dalle soluzioni del sistema  $A\mathbf{v} = 0$  e  $\mathbf{v} = (3, 1, 0)$  è l'autovettore corrispondente all'autovalore nullo. La restante radice del polinomio caratteristico è  $\lambda = 3$  con relativo autovettore  $(6, -1, 3)$  e la matrice di passaggio alla forma diagonale è

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

2. (a) Risolvere il problema di Cauchy 
$$\begin{cases} y'' + y = x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

- Determinare tutti i valori del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  per i quali l'equazione  $y'' - \alpha y = 0$  ha infinite soluzioni periodiche.

**Soluzione:** L'integrale generale dell'equazione è  $y(x) = A \cos x + B \sin x + (x^2 - 2)$  ed imponendo i dati iniziali si ha  $A = 2$  e  $B = 0$ .

- Le soluzioni periodiche si ottengono per  $\alpha < 0$  e sono date da  $y(x) = A \cos \sqrt{-\alpha}x + B \sin \sqrt{-\alpha}x$ .

3. Determinare, se esistono, massimo e minimo assoluti della funzione  $g(x, y) = x^3 + y^3$  sull'insieme  $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ .

**Soluzione:** La funzione proposta assume massimo e minimo assoluti in quanto continua su un insieme chiuso e limitato. L'origine è l'unico punto critico per la funzione all'interno del quadrato di lato di lunghezza due e centro nell'origine e l'incremento  $g(x, y) - g(0, 0) = g(x, y)$  che cambia segno in un intorno dell'origine che risulta pertanto una sella. Ad esempio con il metodo delle restrizioni si vede che il massimo assoluto è 2 e per simmetria il minimo assoluto è -2.

4. Si consideri la superficie  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4\}$  orientata con vettore normale avente componente  $\mathbf{k}$  positiva.

(a) Dato il campo  $\mathbf{F} = (y - 2z, y, 2x + e^{z^2})$ , calcolare il rotore di  $\mathbf{F}$  e stabilire se è conservativo.

(b) Calcolare il lavoro compiuto da  $\mathbf{F}$  lungo il cammino  $\partial\Sigma$  (con orientazione indotta da  $\Sigma$ ).

**Soluzione:**  $\nabla \times \mathbf{F} = -4\mathbf{j} - \mathbf{k}$  ed il campo non è conservativo. (b): utilizzando ad esempio il teorema di Stokes si ha che il lavoro cercato è uguale al flusso del rotore del campo, appena calcolato, attraverso la superficie  $\Sigma$  e quindi pari a

$$\iint_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (8\rho \sin \theta - 1)\rho \, d\rho \, d\theta = -4\pi$$

dove si è presa come parametrizzazione di  $\Sigma$ ,  $\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ , con  $(x^2 + y^2) \leq 4$ .