Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**II Appello** **15 settembre 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **<u>Tutte le risposte devono essere motivate.</u> Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Date le matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   (a) trovare gli autovalori di A e di B;

   (b) stabilire se le matrici A e B sono diagonalizzabili;

   (c) stabilire se esistono due matrici P e Q invertibili tali che $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$.

2. Data la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π, definita da $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ \sin x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

(a) disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$;

(b) calcolare i coefficienti a_1 e b_1 della serie di Fourier di f;

(c) stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge a $f(x)$.

3. (a) Dare la definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso il bordo di un dominio limitato in $\mathbb{R}^2$.

   (b) Enunciare il teorema della divergenza nel piano.

   (c) Mediante il teorema della divergenza calcolare il flusso del vettore

$$\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + x^6\mathbf{j}$$

   attraverso il bordo $\partial^+ D$ del dominio D che, nelle coordinate polari (ρ, θ), è dato da

$$D = \{0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \rho \le \theta^{1/3}\}.$$

4. Si consideri la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2y}{3x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Dimostrare che $f(x,y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y)$ in $(0,0)$ lungo la direzione individuata dal vettore $v = (1,1)$.

(c) Dire se $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**II Appello** **15 settembre 2011**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Date le matrici: $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

   (a) trovare gli autovalori di A e di B;

   (b) stabilire se le matrici A e B sono diagonalizzabili;

   (c) stabilire se esistono due matrici P e Q invertibili tali che $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$.

2. Data la funzione $f(x)$, periodica di periodo 2π, definita da $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

(a) disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$;

(b) calcolare i coefficienti a_1 e b_1 della serie di Fourier di f;

(c) stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di f converge a $f(x)$.

3. (a) Dare la definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso il bordo di un dominio limitato in $\mathbb{R}^2$.
   (b) Enunciare il teorema della divergenza nel piano.
   (c) Mediante il teorema della divergenza calcolare il flusso del vettore

$$\mathbf{F} = 3xy\mathbf{i} + x^6\mathbf{j}$$

attraverso il bordo $\partial^+ D$ del dominio D che, nelle coordinate polari (ρ, θ), è dato da

$$D = \{0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq \theta^{1/3}\}.$$

4. Si consideri la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^3 - xy^2}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(a) Dimostrare che $f(x,y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcolare la derivata direzionale di $f(x,y)$ in $(0,0)$ lungo la direzione individuata dal vettore $v = (-1,1)$.

(c) Dire se $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$.