

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 Docente:		III Appello 14 febbraio 2012
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

- (a) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.
- (b) Stabilire se la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2(n/2)}{n^2} \right)^{2n}.$$

- (c) Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

2. (a) Dare la definizione di lavoro compiuto da un campo vettoriale \mathbf{F} nello spazio \mathbb{R}^3 lungo un cammino parametrizzato γ .
- (b) Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ lungo la linea γ di equazioni parametriche:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (t^2, e^t, t), \quad t \in [0, 1].$$

3. Sia $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base di \mathbb{R}^3 e sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad T(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \quad T(\mathbf{u}_3) = 0$$

- (a) Scrivere la matrice \mathbf{A} che rappresenta T rispetto alla base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.
- (b) Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice \mathbf{A} .
- (c) Esiste una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice che rappresenta T è diagonale?
- (d) Trovare una base del sottospazio $\text{Im } T$ (l'immagine dell'applicazione).
- (e) Trovare gli eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $2\mathbf{u}_1 + h\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$ appartiene a $\text{Ker } T$.
- (f) L'applicazione T^{2012} è iniettiva?

4. Sia data la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \beta & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Determinare il valore di β per cui la funzione è continua nell'origine.
- (b) Calcolare le derivate parziali nell'origine della funzione assegnata per il valore β trovato nel punto precedente. E' necessario utilizzare la relazione $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$, valida per ogni $t > 0$.
- (c) Dare la definizione di differenziabilità nell'origine per una generica funzione $f(x, y)$.
- (d) Per il valore di β per cui la funzione $f(x, y)$ è continua nell'origine, stabilire se essa risulta anche differenziabile nell'origine.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 Docente:		III Appello 14 febbraio 2012
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. (a) Enunciare il criterio della radice per le serie numeriche.
- (b) Stabilire se la serie converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin^2(n/3)}{n^2} \right)^{3n}.$$

- (c) Determinare la somma della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n$$

2. (a) Dare la definizione di lavoro compiuto da un campo vettoriale \mathbf{F} nello spazio \mathbb{R}^3 lungo un cammino parametrizzato γ .
- (b) Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ lungo la linea γ di equazioni parametriche:

$$(x(t), y(t), z(t)) = (t, e^t, t^2), \quad t \in [0, 1].$$

3. Sia $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base di \mathbb{R}^3 e sia $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2, \quad T(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2, \quad T(\mathbf{u}_3) = 0$$

- (a) Scrivere la matrice \mathbf{A} che rappresenta T rispetto alla base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.
- (b) Determinare gli autovalori e gli autovettori della matrice \mathbf{A} .
- (c) Esiste una base di \mathbb{R}^3 rispetto alla quale la matrice che rappresenta T è diagonale?
- (d) Trovare una base del sottospazio $\text{Im } T$ (l'immagine dell'applicazione).
- (e) Trovare gli eventuali valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $2\mathbf{u}_1 + h\mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3$ appartiene a $\text{Ker } T$.
- (f) L'applicazione T^{2012} è iniettiva?

4. Sia data la funzione:

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ \beta & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Determinare il valore di β per cui la funzione è continua nell'origine.
- (b) Calcolare le derivate parziali nell'origine della funzione assegnata per il valore β trovato nel punto precedente. E' necessario utilizzare la relazione $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$, valida per ogni $t > 0$.
- (c) Dare la definizione di differenziabilità nell'origine per una generica funzione $f(x, y)$.
- (d) Per il valore di β per cui la funzione $f(x, y)$ è continua nell'origine, stabilire se essa risulta anche differenziabile nell'origine.