Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**16-07-2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica, è:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare dimensione e una base ortonormale dell'immagine $\operatorname{Im} f$.

(b) Determinare dimensione e una base ortonormale del nucleo $\operatorname{Ker} f$.

(c) Determinare autovalori e autovettori di $\mathbf{A}$.

(d) Stabilire se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rk} A = 2$.

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Una base ortonormale dell'immagine $\operatorname{Im} f$ *è* $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(b) $\dim \ker f = \dim \operatorname{dom} f - \dim \operatorname{Im} f = 1$

$$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right).$$

Una base ortonormale del nucleo $\ker f$ *è* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right)$.

(c) Autovalori: $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda - 5)^2$.

Autospazio $V_0 = \ker f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$.

Autospazio $V_5 = Sol\,(2x - y = 0) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

(d) Poiché $\mathbb{R}^3$ *ammette una base di autovettori di* f, *la matrice* $\mathbf{A}$ *è diagonalizzabile.*

2. Trovare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x,y) = e^{-xy}$ sull'insieme

$$D = \{(x,y) : 9x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Soluzione.

La funzione $g(t) = e^{-t}$ *è monotona decrescente, quindi i punti di massimo di* $f(x,y) = e^{-xy}$ *sono esattamente i punti di minimo di* $F(x,y) = xy$ *e i punti di minimo di* f *sono esattamente i punti di massimo* F *. Ricerchiamo allora gli estremanti di* $F(x,y) = xy$ *sull'insieme* D *dato.*

L'interno del dominio D *:*

$\nabla F(x,y) = (y,x)$ *, quindi l'unico punto stazionario per* F *è* $O(0,0)$ *, punto interno di* D *.*

Poiché la matrice hessiana è $HF(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *, con* $\det HF(0,0) = -1 < 0$ *, l'origine è un punto di sella.*

Quindi f *e* F *non hanno punti estremanti all'interno di* D *.*

Il bordo $\mathcal{E}$ *del dominio* D *:*

Una parametrizzazione di $\mathcal{E}$ *è* $\mathbf{r}(t) = (\frac{\cos t}{3}, \frac{\sin t}{2})$ *, con* $0 \leq t \leq 2\pi$ *.*
La restrizione di F *ad* $\mathcal{E}$

$$F(\mathbf{r}(t)) = \frac{\cos t \sin t}{6} = \frac{\sin 2t}{12} ,$$

presenta un massimo per $t = \frac{\pi}{4}$ *e* $t = \frac{5\pi}{4}$ *, un minimo per* $t = \frac{3\pi}{4}$ *e* $t = \frac{7\pi}{4}$

I punti

$$A = \mathbf{r}(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad , \quad B = \mathbf{r}(\frac{5\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

sono di minimo per f *ed il minimo (assoluto su* D *) è*

$$f(A) = f(B) = e^{-1/12}.$$

I punti

$$C = \mathbf{r}(\frac{3\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad , \quad D = \mathbf{r}(\frac{7\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

sono di massimo per f *ed il massimo (assoluto su* D *) è*

$$f(C) = f(D) = e^{+1/12}.$$

3. (a) Dare la definizione di integrale di una funzione scalare su una superficie regolare.
   (b) Sia S la superficie di equazione $z = x^3 + y^3$ dove $(x, y) \in T$ e

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

   Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\iint_S \frac{z - x^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \, dS.$$

Soluzione.

La superficie S *è il grafico della funzione* $g(x, y) = x^3 + y^3$ *, quindi*

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} \, dx \, dy \, .$$

Abbiamo allora

$$\iint_S \frac{z - x^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \, dS = \iint_T \frac{(x^3 + y^3) - x^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} \, dx \, dy = \iint_T y^3 \, dx \, dy$$

Calcolo in coordinate cartesiane:

osservato che

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq +\sqrt{1 - (x-1)^2}\},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint_T y^3 \, dx \, dy &= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y^3 \, dy \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(1 - (x-1)^2\right)^2 \, dx \\ &= \ldots \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Calcolo in coordinate polari:

posto

$$\begin{cases} x - 1 = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \qquad \textit{con } \rho \in [0, 1] \ \textit{ e } \ \vartheta \in [0, \pi],$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint_T y^3 \, dx \, dy &= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} (\rho \sin \vartheta)^3 \rho \, d\rho \, d\vartheta \\ &= \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_0^\pi \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \right) \\ &= \ldots \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

4. (a) Enunciare il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

   (b) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale

$$y''(x) + 25y(x) = \sin x.$$

   (c) Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali

$$y'(t) = 5y(t) - z(t), \qquad z'(t) = y(t) - 5z(t).$$

Soluzioni

(a) (...)

(b) Integrale generale

$$y(t) = C_1 \cos(5t) + C_2 \sin(5t) + \frac{1}{24} \sin t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

(c) Integrale generale

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\sqrt{24}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 - \sqrt{24} \end{bmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{24}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 + \sqrt{24} \end{bmatrix} \qquad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**16-07-2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica, è:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare dimensione e una base ortonormale dell'immagine $\mathrm{Im} f$.

(b) Determinare dimensione e una base ortonormale del nucleo $\mathrm{Ker} f$.

(c) Determinare autovalori e autovettori di $\mathbf{A}$.

(d) Stabilire se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rk} A = 2$.

$$\mathrm{Im} f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

Una base ortonormale dell'immagine $\mathrm{Im} f$ *è* $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(b) $\dim \ker f = \dim \mathrm{dom} f - \dim \mathrm{Im} f = 1$

$$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right).$$

Una base ortonormale del nucleo $\ker f$ *è* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}\right)$.

(c) Autovalori: $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 4 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda - 4)^2$.

Autospazio $V_0 = \ker f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

Autospazio $V_4 = Sol\,(2x - y = 0) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) Poiché $\mathbb{R}^3$ *ammette una base di autovettori di* f*, la matrice* $\mathbf{A}$ *è diagonalizzabile.*

2. Trovare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x,y) = e^{-xy}$ sull'insieme

$$D = \{(x,y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 1\}.$$

Soluzione.

La funzione $g(t) = e^{-t}$ *è monotona decrescente, quindi i punti di massimo di* $f(x,y) = e^{-xy}$ *sono esattamente i punti di minimo di* $F(x,y) = xy$ *e i punti di minimo di* f *sono esattamente i punti di massimo* F *. Ricerchiamo allora gli estremanti di* $F(x,y) = xy$ *sull'insieme* D *dato.*

L'interno del dominio D *:*

$\nabla F(x,y) = (y,x)$ *, quindi l'unico punto stazionario per* F *è* $O(0,0)$ *, punto interno di* D *.*

Poiché la matrice hessiana è $HF(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *, con* $\det HF(0,0) = -1 < 0$ *, l'origine è un punto di sella.*

Quindi f *e* F *non hanno punti estremanti all'interno di* D *.*

Il bordo $\mathcal{E}$ *del dominio* D *:*

Una parametrizzazione di $\mathcal{E}$ *è* $\mathbf{r}(t) = (\frac{\cos t}{2}, \frac{\sin t}{3})$ *, con* $0 \leq t \leq 2\pi$ *.*

La restrizione di F *ad* $\mathcal{E}$

$$F(\mathbf{r}(t)) = \frac{\cos t \sin t}{6} = \frac{\sin 2t}{12} \, ,$$

presenta un massimo per $t = \frac{\pi}{4}$ *e* $t = \frac{5\pi}{4}$ *, un minimo per* $t = \frac{3\pi}{4}$ *e* $t = \frac{7\pi}{4}$

I punti

$$A = \mathbf{r}(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \quad , \quad B = \mathbf{r}(\frac{5\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

sono di minimo per f *ed il minimo (assoluto su* D *) è*

$$f(A) = f(B) = e^{-1/12}.$$

I punti

$$C = \mathbf{r}(\frac{3\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \quad , \quad D = \mathbf{r}(\frac{7\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

sono di massimo per f *ed il massimo (assoluto su* D *) è*

$$f(C) = f(D) = e^{+1/12}.$$

3. (a) Dare la definizione di integrale di una funzione scalare su una superficie regolare.

   (b) Sia S la superficie di equazione $z = x^3 + y^3$ dove $(x, y) \in T$ e

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

   Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\iint_S \frac{z - y^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \, dS.$$

Soluzione.

La superficie S *è il grafico della funzione* $g(x, y) = x^3 + y^3$ *, quindi*

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} \, dx \, dy \ .$$

Abbiamo allora

$$\iint_S \frac{z - y^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \, dS = \iint_T \frac{(x^3 + y^3) - y^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} \, dx \, dy = \iint_T x^3 \, dx \, dy$$

Calcolo in coordinate cartesiane:

osservato che

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 2, \ 0 \leq x \leq +\sqrt{1 - (y-1)^2}\},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iint_T x^3 \, dx \, dy &= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} x^3 \, dx \right] dy \\
&= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(1 - (y-1)^2\right)^2 \, dy \\
&= \ldots \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Calcolo in coordinate polari:

posto

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y - 1 = \rho \sin \vartheta \end{cases} \qquad \textit{con } \rho \in [0, 1] \ \textit{ e } \ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iint_T x^3 \, dx \, dy &= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \vartheta)^3 \rho \, d\rho \, d\vartheta \\
&= \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \vartheta \, d\vartheta \right) \\
&= \ldots \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

4. (a) Enunciare il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.
   (b) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale
$$y''(x) + 16y(x) = \sin x.$$
   (c) Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$y'(t) = 4y(t) - z(t), \qquad z'(t) = y(t) - 4z(t).$$

Soluzioni

(a) (...)

(b) Integrale generale
$$y(t) = C_1 \cos(4t) + C_2 \sin(4t) + \frac{1}{15} \sin t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

(c) Integrale generale
$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\sqrt{15}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 - \sqrt{15} \end{bmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{15}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 + \sqrt{15} \end{bmatrix} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**16-07-2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica, è:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinare dimensione e una base ortonormale dell'immagine $\mathrm{Im} f$.

(b) Determinare dimensione e una base ortonormale del nucleo $\mathrm{Ker} f$.

(c) Determinare autovalori e autovettori di $\mathbf{A}$.

(d) Stabilire se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rk} A = 2$.

$$\mathrm{Im} f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Una base ortonormale dell'immagine $\mathrm{Im} f$ *è* $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

(b) $\dim \ker f = \dim \mathrm{dom} f - \dim \mathrm{Im} f = 1$

$$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Una base ortonormale del nucleo $\ker f$ *è* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 5/\sqrt{126} \\ -10/\sqrt{126} \\ 1/\sqrt{126} \end{bmatrix} \right)$.

(c) Autovalori: $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 6 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda-5)^2$.

Autospazio $V_0 = \ker f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Autospazio $V_5 = Sol \left(\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

(d) Poiché un autovalore non è regolare, la matrice $\mathbf{A}$ *non è diagonalizzabile.*

2. Trovare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x,y) = e^{-xy}$ sull'insieme

$$D = \{(x,y) : 16x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Soluzione.

La funzione $g(t) = e^{-t}$ *è monotona decrescente, quindi i punti di massimo di* $f(x,y) = e^{-xy}$ *sono esattamente i punti di minimo di* $F(x,y) = xy$ *e i punti di minimo di* f *sono esattamente i punti di massimo* F. *Ricerchiamo allora gli estremanti di* $F(x,y) = xy$ *sull'insieme* D *dato.*

L'interno del dominio D:

$\nabla F(x,y) = (y,x)$, *quindi l'unico punto stazionario per* F *è* $O(0,0)$, *punto interno di* D.

Poiché la matrice hessiana è $HF(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, *con* $\det HF(0,0) = -1 < 0$, *l'origine è un punto di sella.*

Quindi f *e* F *non hanno punti estremanti all'interno di* D.

Il bordo $\mathcal{E}$ *del dominio* D:

Una parametrizzazione di $\mathcal{E}$ *è* $\mathbf{r}(t) = (\frac{\cos t}{4}, \sin t)$, *con* $0 \leq t \leq 2\pi$.

La restrizione di F *ad* $\mathcal{E}$

$$F(\mathbf{r}(t)) = \frac{\cos t \sin t}{4} = \frac{\sin 2t}{8},$$

presenta un massimo per $t = \frac{\pi}{4}$ *e* $t = \frac{5\pi}{4}$, *un minimo per* $t = \frac{3\pi}{4}$ *e* $t = \frac{7\pi}{4}$

I punti

$$A = \mathbf{r}(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad B = \mathbf{r}(\frac{5\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

sono di minimo per f *ed il minimo (assoluto su* D *) è*

$$f(A) = f(B) = e^{-1/8}.$$

I punti

$$C = \mathbf{r}(\frac{3\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad D = \mathbf{r}(\frac{7\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

sono di massimo per f *ed il massimo (assoluto su* D *) è*

$$f(C) = f(D) = e^{+1/8}.$$

3. (a) Dare la definizione di integrale di una funzione scalare su una superficie regolare.
   (b) Sia S la superficie di equazione $z = x^3 + y^3$ dove $(x, y) \in T$ e

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\iint_S \frac{z - x^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \, dS.$$

Soluzione.
La superficie S *è il grafico della funzione* $g(x, y) = x^3 + y^3$, *quindi*

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} \, dx \, dy \, .$$

Abbiamo allora

$$\iint_S \frac{z - x^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \, dS = \iint_T \frac{(x^3 + y^3) - x^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} \, dx \, dy = \iint_T y^3 \, dx \, dy$$

Calcolo in coordinate cartesiane:
osservato che

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq +\sqrt{1 - (x-1)^2}\},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint_T y^3 \, dx \, dy &= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y^3 \, dy \right] dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(1 - (x-1)^2\right)^2 \, dx \\ &= \ldots \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Calcolo in coordinate polari:
posto

$$\begin{cases} x - 1 = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases} \qquad \textit{con } \rho \in [0, 1] \ \textit{ e } \ \vartheta \in [0, \pi],$$

abbiamo:

$$\begin{aligned} \iint_T y^3 \, dx \, dy &= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} (\rho \sin \vartheta)^3 \rho \, d\rho \, d\vartheta \\ &= \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \right) \\ &= \ldots \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

4. (a) Enunciare il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.
   (b) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale
$$y''(x) + 9y(x) = \sin x.$$
   (c) Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$y'(t) = 3y(t) - z(t), \qquad z'(t) = y(t) - 3z(t).$$

Soluzioni

(a) (...)

(b) Integrale generale
$$y(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \sin(3t) + \frac{1}{8} \sin t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

(c) Integrale generale
$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\sqrt{8}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3-\sqrt{8} \end{bmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{8}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3+\sqrt{8} \end{bmatrix} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e geometria 2 **Docente:**		**16-07-2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica, è:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determinare dimensione e una base ortonormale dell'immagine $\mathrm{Im} f$.

   (b) Determinare dimensione e una base ortonormale del nucleo $\mathrm{Ker} f$.

   (c) Determinare autovalori e autovettori di $\mathbf{A}$.

   (d) Stabilire se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.

Soluzione.

(a) $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rk} A = 2$.

$$\mathrm{Im} f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\5\end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right).$$

Una base ortonormale dell'immagine $\mathrm{Im} f$ *è* $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix}1/\sqrt{5}\\2/\sqrt{5}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$.

(b) $\dim \ker f = \dim \mathrm{dom} f - \dim \mathrm{Im} f = 1$

$$\ker f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}10\\-5\\-1\end{bmatrix}\right).$$

Una base ortonormale del nucleo $\ker f$ *è* $\mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix}10/\sqrt{126}\\-5/\sqrt{126}\\-1/\sqrt{126}\end{bmatrix}\right)$.

(c) Autovalori: $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda - 5)^2$.

Autospazio $V_0 = \ker f = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}10\\-5\\-1\end{bmatrix}\right)$.

Autospazio $V_5 = Sol\left(\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}\right) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$

(d) Poiché un autovalore non è regolare, la matrice $\mathbf{A}$ *non è diagonalizzabile.*

2. Trovare i punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x,y) = e^{-xy}$ sull'insieme

$$D = \{(x,y) : x^2 + 25y^2 \leq 1\}.$$

Soluzione.

La funzione $g(t) = e^{-t}$ *è monotona decrescente, quindi i punti di massimo di* $f(x,y) = e^{-xy}$ *sono esattamente i punti di minimo di* $F(x,y) = xy$ *e i punti di minimo di* f *sono esattamente i punti di massimo* F *. Ricerchiamo allora gli estremanti di* $F(x,y) = xy$ *sull'insieme* D *dato.*

L'interno del dominio D *:*

$\nabla F(x,y) = (y,x)$ *, quindi l'unico punto stazionario per* F *è* $O(0,0)$ *, punto interno di* D *.*

Poiché la matrice hessiana è $HF(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *, con* $\det HF(0,0) = -1 < 0$ *, l'origine è un punto di sella.*

Quindi f *e* F *non hanno punti estremanti all'interno di* D *.*

Il bordo $\mathcal{E}$ *del dominio* D *:*

Una parametrizzazione di $\mathcal{E}$ *è* $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \frac{\sin t}{5})$ *, con* $0 \leq t \leq 2\pi$ *.*

La restrizione di F *ad* $\mathcal{E}$

$$F(\mathbf{r}(t)) = \frac{\cos t \sin t}{5} = \frac{\sin 2t}{10} \ ,$$

presenta un massimo per $t = \frac{\pi}{4}$ *e* $t = \frac{5\pi}{4}$ *, un minimo per* $t = \frac{3\pi}{4}$ *e* $t = \frac{7\pi}{4}$

I punti

$$A = \mathbf{r}(\frac{\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right) \ , \quad B = \mathbf{r}(\frac{5\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$$

sono di minimo per f *ed il minimo (assoluto su* D *) è*

$$f(A) = f(B) = e^{-1/10}.$$

I punti

$$C = \mathbf{r}(\frac{3\pi}{4}) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{10}\right) \ , \quad D = \mathbf{r}(\frac{7\pi}{4}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$$

sono di massimo per f *ed il massimo (assoluto su* D *) è*

$$f(C) = f(D) = e^{+1/10}.$$

3. (a) Dare la definizione di integrale di una funzione scalare su una superficie regolare.
   (b) Sia S la superficie di equazione $z = x^3 + y^3$ dove $(x, y) \in T$ e

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0\}.$$

   Calcolare il seguente integrale di superficie

$$\iint_S \frac{z - y^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \, dS.$$

Soluzione.
La superficie S *è il grafico della funzione* $g(x, y) = x^3 + y^3$ *, quindi*

$$dS = \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} \, dx \, dy \, .$$

Abbiamo allora

$$\iint_S \frac{z - y^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \, dS = \iint_T \frac{(x^3 + y^3) - y^3}{\sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)}} \sqrt{1 + 9(x^4 + y^4)} \, dx \, dy = \iint_T x^3 \, dx \, dy$$

Calcolo in coordinate cartesiane:
osservato che

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq y \leq 2, \ 0 \leq x \leq +\sqrt{1 - (y-1)^2}\},$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iint_T x^3 \, dx \, dy &= \int_0^2 \left[\int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} x^3 \, dx \right] dy \\
&= \frac{1}{4} \int_0^2 \left(1 - (y-1)^2\right)^2 \, dy \\
&= \dots \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Calcolo in coordinate polari:
posto

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y - 1 = \rho \sin \vartheta \end{cases} \qquad \text{con } \rho \in [0, 1] \ \text{ e } \ \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

abbiamo:

$$\begin{aligned}
\iint_T x^3 \, dx \, dy &= \int_{\rho=0}^{\rho=1} \int_{\vartheta=-\frac{\pi}{2}}^{\vartheta=\frac{\pi}{2}} (\rho \cos \vartheta)^3 \rho \, d\rho \, d\vartheta \\
&= \left(\int_0^1 \rho^4 \, d\rho \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \vartheta \, d\vartheta \right) \\
&= \dots \\
&= \frac{4}{15}
\end{aligned}$$

4. (a) Enunciare il teorema di struttura dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea.

   (b) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale
$$y''(x) + 4y(x) = \sin x.$$

   (c) Determinare l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali
$$y'(t) = 2y(t) - z(t), \qquad z'(t) = y(t) - 2z(t).$$

Soluzioni

(a) (...)

(b) Integrale generale
$$y(t) = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin t \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

(c) Integrale generale
$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{\sqrt{3}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix} + C_2 e^{-\sqrt{3}t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$