Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Secondo appello** **13–09–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Si considerino la funzione $q(x,y) = x^2 + 8xy + y^2$ e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   (a) Spiegare perché D è chiuso e limitato e perché q è continua su D.
   (b) Dire se esiste un punto $(x_0, y_0) \in D$ che soddisfi la seguente condizione:
   $$\forall (x,y) \in D\,, \quad q(x,y) \leq q(x_0,y_0).$$
   (c) Trovare, se esiste, il valore massimo di q su D.

Soluzione

La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ è continua su $\mathbb{R}^2$ perché è un polinomio, quindi l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \leq 1\}$ è chiuso. È limitato perché ogni punto di D ha distanza al massimo 1 dall'origine. La funzione $q(x,y)$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ perché è un polinomio in x e y. Per il teorema di Weierstrass, la funzione $q(x,y)$ ha massimo assoluto in D, cioè esiste $(x_0,y_0) \in D$ soddisfacente la condizione in (b). Il punto (c) si può risolvere sia con metodi di calcolo differenziale (teorema di Fermat all'inteno del disco e moltiplicatori di Lagrange sul bordo del disco) sia con metodi di algebra lineare, perché $q(x,y)$ è una forma quadratica. Vediamo la soluzione mediante metodi di algebra lineare. Alla forma quadratica $q(x,y)$ è associata la matrice simmetrica $\mathbf{A}$:
$$q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
Dalla teoria delle forme quadratiche segue che il massimo di $q(x,y)$ sul disco unitario D coincide col massimo autovalore di $\mathbf{A}$. Poiché
$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 2\lambda - 15 = (\lambda - 5)(\lambda + 3)$$
il massimo è 5.

Per risolvere il problema con metodi di calcolo differenziale, notiamo innanzitutto che
$$q_x(x,y) = 2(x + 4y), \quad q_y(x,y) = 2(y + 4x)$$
per cui l'unico punto critico di $q(x,y)$ è $(0,0)$. Siccome $q(0,0) = 0$ mentre $q(x,0) = x^2$, certamente $(0,0)$ non è un punto di massimo assoluto. Ma allora i punti di massimo assoluto si trovano sul bordo del disco. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: i punti critici della lagrangiana
$$L(x,y) = q(x,y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$
soddisfano l'equazione
$$0 = y(x + 4y) - x(y + 4x) = 4(y^2 - x^2)$$
e sono quindi i 4 punti in cui la circonferenza unitaria interseca le due bisettrici dei quadranti del piano cartesiano. Siccome la funzione $q(x,y)$ è simmetrica rispetto all'origine ($q(x,y) = q(-x,-y)$), è sufficiente calcolare q nei due punti critici con $x > 0$:
$$q(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5, \quad q(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) < q(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$
per cui il massimo cercato è 5.

2. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = -\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

definita sul piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) Calcolare l'integrale doppio

$$I(a) = \iint_{C_a} f(x,y)\,dxdy$$

dove $0 < a < 1$ e $C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$.

(b) Calcolare il limite

$$\lim_{a\to 0^+} I(a)$$

e darne un'interpretazione geometrica.

Soluzione Calcoliamo l'integrale passando a coordinate polari:

$$I(a) = \iint_{C_a} f(x,y)\,dxdy = -\iint_{\{(\rho,\theta):\, a\le\rho\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi\}} \ln(\rho)\rho\,d\rho d\theta$$

Integrando per parti $\rho\ln(\rho)$ otteniamo

$$\int \rho\ln(\rho)\,d\rho = \frac{\rho^2}{4}(2\ln(\rho)-1)$$

per cui

$$I(a) = -\frac{\pi}{2}\left(-1-a^2(2\ln(a)-1)\right), \quad \lim_{a\to 0^+} I(a) = \frac{\pi}{2}$$

Geometricamente, il limite rappresenta il volume della porzione (illimitata) di spazio che giace sopra il disco unitario del piano xy e sotto il grafico $z = f(x,y)$ della funzione assegnata (si tratta di una specie di tromba infinita, col trombettiere che soffia dal punto all'infinito dell'asse z).

3. Si considerino il campo vettoriale, definito su $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x-y)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (-x-y)\mathbf{k}$$

e le due superfici

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$$

e

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\}$$

entrambe orientate con il versore normale che punta verso l'alto.

(a) Sulla base di considerazioni teoriche (senza fare conti), trovare una relazione tra il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 e il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_2 .

(b) Trovare il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 mediante il calcolo di un integrale di superficie.

(c) Trovare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il bordo orientato positivamente di S_1 , calcolando esplicitamente un integrale di linea.

(d) Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$?

Soluzione

Entrambe le superfici orientate S_1 e S_2 hanno come bordo la circonferenza di equazione $x^2+y^2=4$ nel piano xy , ed entrambe inducono sul bordo il senso antiorario come orientazione. Per il teorema del rotore, il flusso del rotore del campo attraverso a S_1 è uguale a quello attraverso S_2 . Possiamo risolvere il punto (b) integrando il rotore del campo su S_2 . Ora il rotore del campo è il vettore costante $[-2,1,2]^T$, il versore normale a S_2 è anch'esso costante uguale al versore del semiasse z positivo, per cui

$$\iint_{S_2} \operatorname{rot}\mathbf{F}.\mathbf{N}dS = \iint_{x^2+y^2\leq 4} 2\,dxdy = 8\pi.$$

Per calcolare il lavoro del campo sulla circonferenza γ orientata in senso antiorario, utilizziamo per γ la parametrizzazione $(x(t),y(t),z(t)) = (2\cos(t), 2\sin(t), 0)$ al variare di t in $[0,2\pi]$, per cui

$$\int_\gamma \mathbf{F}.\mathbf{T}ds = \int_0^{2\pi} 2(\cos t - \sin t)(-2\sin t) + 2\cos t(2\cos t)\,dt = 4\int_0^{2\pi}(\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 8\pi$$

Infine il campo non è conservativo in alcun aperto di $\mathbb{R}^3$ perché il suo rotore non si annulla in alcun punto.

4. Se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $T_\mathbf{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che a ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$ associa il prodotto vettoriale $T_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

   (a) Posto $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, trovare una base del sottospazio Ker $T_\mathbf{a}$.

   (b) Posto $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (0, 1, 1)$.

   (c) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $T_\mathbf{a}$ rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (d) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $T_\mathbf{a}$?

Soluzione Il nucleo di Ker $T_\mathbf{a}$ consiste dei vettori $\mathbf{x}$ per cui $\mathbf{a} \times \mathbf{x}$ è il vettore nullo, quindi della retta generata da $\mathbf{a}$. In coordinate, se $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$ e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, allora

$$\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (0, -x_3, x_2).$$

Il nucleo di $T_\mathbf{a}$ consiste in questo caso dei vettori che soddisfano l'equazione $x_2 = x_3 = 0$, cioè dei vettori $(x_1, 0, 0)$ dell'asse x_1. L'insieme delle soluzioni di $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (0, 1, 1)$ è l'insieme

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_2 = 1, x_3 = -1\};$$

si tratta della retta parallela all'asse x_1 per il punto $(0, 1, -1)$ che ha equazioni parametriche

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$T_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ -a_1 x_3 + a_3 x_1 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{bmatrix}$$

la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $T_\mathbf{a}$ rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Infine, supponiamo che $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ sia un autovettore di $T_\mathbf{a}$. Allora da un lato $T_\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ e dall'altro $T_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ è perpendicolare a $\mathbf{x}$. Quindi calcolando il prodotto scalare tra $\mathbf{x}$ e $T_\mathbf{a}(\mathbf{x})$ otteniamo $\lambda \, || \, \mathbf{x} \, ||^2 = 0$, per cui $\lambda = 0$. Quindi $\mathbf{x}$ appartiene al nucleo di $T_\mathbf{a}$, cioè alla retta generata da $\mathbf{a}$. Quindi gli autovettori di $T_\mathbf{a}$ appartengono tutti a una medesima retta per l'origine, e nessuna base di $\mathbb{R}^3$ può essere formata da autovettori di $T_\mathbf{a}$.

In alternativa, si può calcolare il polinomio caratteristico della matrice $\mathbf{A}$:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -a_3 & a_2 \\ a_3 & -\lambda & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

che ha un unico autovalore reale $\lambda_1 = 0$, che ha molteplicità algebrica 1, e due autovalori complessi $\lambda_{2,3} = \pm ||\mathbf{a}|| i$. Quindi $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile da una matrice reale, il che equivale a dire che non esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $T_\mathbf{a}$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Secondo appello** **13–09–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Si considerino la funzione $q(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$ e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$.
   (a) Spiegare perché D è chiuso e limitato e perché q è continua su D .
   (b) Dire se esiste un punto $(x_0, y_0) \in D$ che soddisfi la seguente condizione:
   $$\forall (x,y) \in D\,, \quad q(x,y) \le q(x_0,y_0).$$
   (c) Trovare, se esiste, il valore massimo di q su D .

Soluzione

La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ è continua su $\mathbb{R}^2$ perché è un polinomio, quindi l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) \le 1\}$ è chiuso. È limitato perché ogni punto di D ha distanza al massimo 1 dall'origine. La funzione $q(x,y)$ è continua su tutto $\mathbb{R}^2$ perché è un polinomio in x e y . Per il teorema di Weierstrass, la funzione $q(x,y)$ ha massimo assoluto in D , cioè esiste $(x_0,y_0) \in D$ soddisfacente la condizione in (b). Il punto (c) si può risolvere sia con metodi di calcolo differenziale (teorema di Fermat all'inteno del disco e moltiplicatori di Lagrange sul bordo del disco) sia con metodi di algebra lineare, perché $q(x,y)$ è una forma quadratica. Vediamo la soluzione mediante metodi di algebra lineare. Alla forma quadratica $q(x,y)$ è associata la matrice simmetrica $\mathbf{A}$:
$$q(x,y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
Dalla teoria delle forme quadratiche segue che il massimo di $q(x,y)$ sul disco unitario D coincide col massimo autovalore di $\mathbf{A}$. Poiché
$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$
il massimo è 4 .

Per risolvere il problema con metodi di calcolo differenziale, notiamo innanzitutto che
$$q_x(x,y) = 2(x+3y), \quad q_y(x,y) = 2(y+3x)$$
per cui l'unico punto critico di $q(x,y)$ è $(0,0)$. Siccome $q(0,0) = 0$ mentre $q(x,0) = x^2$, certamente $(0,0)$ non è un punto di massimo assoluto. Ma allora i punti di massimo assoluto si trovano sul bordo del disco. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange: i punti critici della lagrangiana
$$L(x,y) = q(x,y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$
soddisfano l'equazione
$$0 = y(x+3y) - x(y+3x) = 3(y^2 - x^2)$$
e sono quindi i 4 punti in cui la circonferenza unitaria interseca le due bisettrici dei quadranti del piano cartesiano. Siccome la funzione $q(x,y)$ è simmetrica rispetto all'origine ($q(x,y) = q(-x,-y)$), è sufficiente calcolare q nei due punti critici con $x > 0$:
$$q(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} + 6\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4, \quad q(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) < q(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$
per cui il massimo cercato è 4 .

2. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = -\ln\left(x^2+y^2\right)$$

definita sul piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) Calcolare l'integrale doppio

$$I(a) = \iint\limits_{C_a} f(x,y)\,dxdy$$

dove $0 < a < 1$ e $C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.

(b) Calcolare il limite

$$\lim_{a\to 0^+} I(a)$$

e darne un'interpretazione geometrica.

Soluzione Calcoliamo l'integrale passando a coordinate polari:

$$I(a) = \iint\limits_{C_a} f(x,y)\,dxdy = -2 \iint\limits_{\{(\rho,\theta):\, a\leq\rho\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}} \ln(\rho)\rho\,d\rho d\theta$$

Integrando per parti $\rho\ln(\rho)$ otteniamo

$$\int \rho\ln(\rho)\,d\rho = \frac{\rho^2}{4}(2\ln(\rho)-1)$$

per cui

$$I(a) = -\pi\left(-1 - a^2(2\ln(a)-1)\right), \quad \lim_{a\to 0^+} I(a) = \pi$$

Geometricamente, il limite rappresenta il volume della porzione (illimitata) di spazio che giace sopra il disco unitario del piano xy e sotto il grafico $z = f(x,y)$ della funzione assegnata.

3. Si considerino il campo vettoriale, definito su $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x-2y)\mathbf{i} + (2x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$

e le due superfici

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$$

e

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\}$$

entrambe orientate con il versore normale che punta verso l'alto.

(a) Sulla base di considerazioni teoriche (senza fare conti), trovare una relazione tra il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 e il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_2 .

(b) Trovare il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 mediante il calcolo di un integrale di superficie.

(c) Trovare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il bordo orientato positivamente di S_1 , calcolando esplicitamente un integrale di linea.

(d) Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$?

Soluzione

Entrambe le superfici orientate S_1 e S_2 hanno come bordo la circonferenza di equazione $x^2+y^2=9$ nel piano xy , ed entrambe inducono sul bordo il senso antiorario come orientazione. Per il teorema del rotore, il flusso del rotore del campo attraverso a S_1 è uguale a quello attraverso S_2 . Possiamo risolvere il punto (b) integrando il rotore del campo su S_2 . Ora il rotore del campo è il vettore costante $[0,-1,4]^T$, il versore normale a S_2 è anch'esso costante uguale al versore del semiasse z positivo, per cui

$$\iint_{S_2} \operatorname{rot}\mathbf{F}.\mathbf{N}dS = \iint_{x^2+y^2\leq 9} 4\,dxdy = 36\pi.$$

Per calcolare il lavoro del campo sulla circonferenza γ orientata in senso antiorario, utilizziamo per γ la parametrizzazione $(x(t),y(t),z(t)) = (3\cos(t), 3\sin(t), 0)$ al variare di t in $[0,2\pi]$, per cui

$$\int_\gamma \mathbf{F}.\mathbf{T}ds = \int_0^{2\pi} (3\cos t - 6\sin t)(-3\sin t) + (6\cos t)(3\cos t)\,dt = 18\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 36\pi$$

Infine il campo non è conservativo in alcun aperto di $\mathbb{R}^3$ perché il suo rotore non si annulla in alcun punto.

4. Se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che a ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$ associa il prodotto vettoriale $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

   (a) Posto $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, trovare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} T_{\mathbf{a}}$.

   (b) Posto $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (1, 1, 0)$.

   (c) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $T_{\mathbf{a}}$ rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (d) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $T_{\mathbf{a}}$?