Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Terzo appello** **22–02–2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Data l'applicazione lineare $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la cui matrice, rispetto alle base canonica di $\mathbb{R}^3$, è $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\-3&-2&h+1\\6&4&2\end{bmatrix}$;

   (a) per ogni valore di $h\in\mathbb{R}$ determinare una base di nucleo e immagine di T;

   (b) trovare il valore di h per il quale A ha un autovalore uguale a 3;

   (c) posto $h=-2$, provare che A è diagonalizzabile, trovare una matrice diagonale D simile ad A e una matrice invertibile S tale che $S^{-1}AS=D$.

Soluzione

(a) Riduciamo a scala la matrice ottenendo $U=\begin{bmatrix}3&2&1\\0&0&h+2\\0&0&0\end{bmatrix}$. Se $h\neq-2$, la matrice a rango due, una base dell'immagine è (per esempio) formata dalle due colonne di $\mathbf{A}$ su cui giacciono i pivots di U, cioè la prima $[3,-3,6]^T$ e la terza $[1,h+1,2]^T$ (ogni scelta di due colonne indipendenti fornisce una base dell'immagine; non si possono scegliere invece le prime due colonne perché sono linearmente dipendenti). Il nucleo di A, che ha dimensione $n-r(A)=3-2=1$, consiste dei vettori $\mathbf{x}=[x,y,z]^T$ che risolvono il sistema $U\mathbf{x}=\mathbf{0}$, ovvero $3x+2y+z=(h+2)z=0$. La seconda equazione dà $z=0$, e nella prima possiamo scegliere y come variabile libera e porre $y=3$ per evitare denominatori. Troviamo il vettore del nucleo $[-2,3,0]^T$ che forma una base del nucleo.

Se invece $h=-2$, la matrice ha rango 1, una base dell'immagine è formata dalla prima colonna (o da un suo multiplo scalare non nullo), e il nucleo è il piano di equazione $3x+2y+z=0$. Assegnando alle variabili libere y e z i valori $(3,0)$ e $(0,3)$ troviamo la base del nucleo $\{[-2,3,0]^T,[-1,0,3]^T\}$.

(b) $\det(A-3I)=12h+24$ è nullo se e solo se $h=-2$, quindi A ha un autovalore uguale a 3 se e solo se $h=-2$.

(c) posto $h=-2$, il rango di A è 1; questo significa che $\lambda=0$ è un autovalore di A di molteplicità geometrica 2, e quindi di molteplicità algebrica almeno 2. Ora per il punto (b), la matrice ha anche l'autovalore 3, quindi il polinomio caratteristico di A è $-\lambda^2(\lambda-3)$. La molteplicità algebrica di $\lambda=0$ è quindi 2, e la matrice è diagonalizzabile perché i suoi autovalori sono regolari. L'autospazio relativo a $\lambda=0$ è il nucleo di A, di cui abbiamo già determinato la base $\{[-2,3,0]^T,[-1,0,3]^T\}$. Per trovare una base dell'autospazio (di dimensione 1) relativo a $\lambda=3$ si può risolvere il sistema $(A-3I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$, ma non è necessario: se $\mathbf{v}$ è un autovettore relativo a $\lambda=3$, allora $A\mathbf{v}=3\mathbf{v}$, quindi $3\mathbf{v}$ (e così $\mathbf{v}$) appartiene all'immagine di $\mathbf{A}$, che sappiamo essere l'insieme dei multipli scalari della prima colonna. Quindi $D=S^{-1}AS$ se

$$D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{bmatrix},\qquad D=\begin{bmatrix}-2&-1&3\\3&0&-3\\0&3&6\end{bmatrix}$$

2. Sia $f(x,y)=y$ se $x=0$, $f(x,y)=0$ se $x\neq0$;

   (a) Calcolare, se esistono, tutte le derivate direzionali di f nell'origine.

   (b) Stabilire se è verificata la formula del gradiente nell'origine.

(c) Stabilire se f è differenziabile nell'origine.

3. Sia $a \in \mathbb{R}$ un parametro per il campo vettoriale piano $\mathbf{F}_a(x,y) = (x^2 + 3y^2, axy)$.

   (a) Per a generico, calcolare il lavoro di $\mathbf{F}_a$ lungo la porzione dell'ellisse $x^2 + 3y^2 = 1$ che congiunge nel semipiano $y \geq 0$ il punto $A = (1,0)$ al punto $B = (-1,0)$, percorsa quindi in senso antiorario.

   (b) Stabilire per quali a il campo risulta conservativo in $\mathbb{R}^2$.

   (c) Determinare un potenziale di $\mathbf{F}_6$.

4. Nello spazio cartesiano sia S la calotta sferica ottenuta intersecando la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio $\sqrt{10}$ col semispazio $z \geq 3$. Si disegni S e se ne calcoli l'area mediante un integrale di superficie.