Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale
3+4	3+4	4+4	4+3+3	32

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Prima prova in itinere** **6 maggio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 5 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

a) verificare che A è diagonalizzabile;

b) determinare una matrice che diagonalizza A.

Soluzione.

a) *Gli autovalori della matrice triangolare A sono:*
$\lambda_0 = 0$, *autovalore semplice e quindi regolare;*
$\lambda_1 = 8$, *autovalore doppio con molteplicità geometrica* $3 - \mathrm{rk}[A - \lambda_1 I] = 2$, *quindi regolare.*
Tutti gli autovalori di A sono reali e regolari, quindi A è diagonalizzabile.

b) *L'autospazio V_0 relativo a $\lambda_0 = 0$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* $[A-\lambda_0 I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

cioè $\begin{cases} 8x + 5z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. *Una base di V_0 è* $((5, 0, -8)^t)$.

L'autospazio V_1 relativo a $\lambda_1 = 8$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $[A-\lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

cioè $z = 0$. *Una base di V_1 è* $((1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t)$.

Una delle matrici che diagonalizzano A è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}$.

2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \ , \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \ , \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$$

dove $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire se il vettore $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ appartiene all'immagine $\operatorname{Im} T$.

b) Trovare una base del nucleo $\ker T$. L'applicazione lineare T è iniettiva?

Soluzione.

Rispetto alla base data, la matrice che rappresenta l'applicazione lineare T *è* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

mentre le coordinate di $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *sono* $(1, 3, 3)$.

a) *Poiché* $\operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, *il vettore* $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *appartiene all'immagine* $\operatorname{Im} T$.

b) *Il sistema lineare omogeneo* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *cioè* $\begin{cases} y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$,

ha come soluzioni $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \qquad (t \in \mathbb{R}) \ . \\ z = -t \end{cases}$

Una base di $\ker T$ *è dunque* $(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3)$.

Poiché $\dim \ker T = 1 \neq 0$, *l'applicazione lineare* T *non è iniettiva.*

3. Fissato $\mathbf{w} = \big(1, 0, \sqrt{3}\big)$, sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita: per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$F(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}$$

(dove $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$).

a) Dimostrare che l'immagine $\operatorname{Im} F$ e il nucleo $\ker F$ sono autospazi di F e trovare i corrispondenti autovalori.

b) Stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F .

Soluzione, primo metodo.

Indichiamo con W *lo spazio generato dal vettore* $\mathbf{w}$ *.*

a) *Per ogni* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *, l'immagine* $F(\mathbf{v})$ *è un multiplo scalare (non sempre nullo) del vettore* $\mathbf{w}$ *, dunque*

$$\mathrm{Im} F = W \ .$$

Per mostrare che lo spazio unidimensionale W *è un autospazio, basta ora verificare che* $\mathbf{w}$ *è un autovettore:* $F(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2 \mathbf{w}$ *, dunque* W *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_0 = \|\mathbf{w}\|^2$ *.*

Osservato che $\dim \ker F = \dim \mathrm{dom} F - \dim \mathrm{Im} F = 2 \neq 0$ *, possiamo affermare che* $\ker F$ *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_1 = 0$ *.*

b) *Il nucleo e l'immagine di* F *sono sottospazi ortogonali, infatti:*

$$\mathrm{Im} F = W \ , \quad \ker F = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\} = W^{\perp}$$

(cioè $\ker F$ *è il piano per l'origine la cui direzione ortogonale è individuata da* $\mathbf{w}$ *).*
Considerata una base ortogonale $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ *di* $\ker F$ *, una base ortonormale di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* F *si ottiene normalizzando* $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ *.*

Soluzione, secondo metodo.

Detta $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *, si ha*

$$F(\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{w} \ , \quad F(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{w} \ , \quad F(\mathbf{e}_3) = \sqrt{3}\mathbf{w} \ .$$

La matrice che rappresenta F *rispetto la base canonica è* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Indichiamo con W *lo spazio generato dal vettore* $\mathbf{w}$ *.*

a) $\mathrm{Im} F$ *è generato dalle colonne di* M *, dunque*

$$\mathrm{Im} F = W \ .$$

Per mostrare che lo spazio unidimensionale W *è un autospazio, basta ora verificare che* $\mathbf{w}$ *è un autovettore:* $F(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2 \mathbf{w}$ *, dunque* W *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_0 = \|\mathbf{w}\|^2$ *.*

Osservato che $\dim \ker F = \dim \mathrm{dom} F - \dim \mathrm{Im} F = 2 \neq 0$ *, possiamo affermare che* $\ker F$ *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_1 = 0$ *.*

b) M *è simmetrica e quindi, per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* F *.*

4. ***a***) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x'' + 3x' = \mathrm{e}^{3t} \\ x'(0) = \dfrac{1}{3} \\ x(0) = \dfrac{1}{9} \end{cases}$.

b) Determinare la soluzione generale dell'equazione $x'' + 3x' = t$.

c) Determinare la soluzione generale dell'equazione $x'' + 3x' = 18t - 5\mathrm{e}^{3t}$.

Soluzione. *La soluzione generale dell'omogenea* $x'' + 3x' = 0$ *è*

$$x_0(t) = A\mathrm{e}^{-3t} + B \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

a) *Una soluzione particolare dell'equazione* $x'' + 3x' = \mathrm{e}^{3t}$ *può essere cercata del tipo* $\tilde{x}(t) = k\mathrm{e}^{3t}$. *La soluzioni generale dell'equazione risulta*

$$x_1(t) = A\mathrm{e}^{-3t} + B + \frac{1}{18}\mathrm{e}^{3t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) ,$$

quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = -\frac{1}{18}\mathrm{e}^{-3t} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}\mathrm{e}^{3t} .$$

b) *Una soluzione particolare dell'equazione* $x'' + 3x' = t$ *può essere cercata del tipo* $\bar{x}(t) = t(at + b)$. *La soluzioni generale dell'equazione risulta*

$$x_2(t) = A\mathrm{e}^{-3t} + B + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{9}t \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

c) *Per il principio di sovrapposizione, la soluzione generale dell'equazione* $x'' + 3x' = 18t - 5\mathrm{e}^{3t}$ *è*

$$x_3(t) = A\mathrm{e}^{-3t} + B + 3t^2 - 2t - \frac{5}{18}\mathrm{e}^{5t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale
3+4	3+4	4+4	4+3+3	32

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Prima prova in itinere** **6 maggio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

a) verificare che A è diagonalizzabile;

b) determinare una matrice che diagonalizza A.

Soluzione.

a) *Gli autovalori della matrice triangolare A sono:*
$\lambda_0 = 0$, *autovalore semplice e quindi regolare;*
$\lambda_1 = 7$, *autovalore doppio con molteplicità geometrica* $3 - \mathrm{rk}[A - \lambda_1 I] = 2$, *quindi regolare.*
Tutti gli autovalori di A sono reali e regolari, quindi A è diagonalizzabile.

b) *L'autospazio V_0 relativo a $\lambda_0 = 0$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* $[A-\lambda_0 I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

cioè $\begin{cases} 7x + 6z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. *Una base di V_0 è* $((6, 0, -7)^t)$.

L'autospazio V_1 relativo a $\lambda_1 = 7$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $[A-\lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

cioè $z = 0$. *Una base di V_1 è* $((1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t)$.

Una delle matrici che diagonalizzano A è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$.

2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\ , \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\ , \quad T(\mathbf{e}_3) = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3$$

dove $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire se il vettore $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ appartiene all'immagine $\operatorname{Im} T$.

b) Trovare una base del nucleo $\ker T$. L'applicazione lineare T è iniettiva?

Soluzione.

Rispetto alla base data, la matrice che rappresenta l'applicazione lineare T *è* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$,

mentre le coordinate di $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *sono* $(1, 3, 3)$.

a) *Poiché* $\operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, *il vettore* $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *appartiene all'immagine* $\operatorname{Im} T$.

b) *Il sistema lineare omogeneo* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *cioè* $\begin{cases} y + 3z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$,

ha come soluzioni $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$.

Una base di $\ker T$ *è dunque* $(2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

Poiché $\dim \ker T = 1 \neq 0$, *l'applicazione lineare* T *non è iniettiva.*

3. Fissato $\mathbf{w} = \left(1, 0, \sqrt{2}\right)$, sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita: per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$F(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}$$

(dove $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$).

a) Dimostrare che l'immagine $\operatorname{Im} F$ e il nucleo $\ker F$ sono autospazi di F e trovare i corrispondenti autovalori.

b) Stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F.

Soluzione, primo metodo.

Indichiamo con W *lo spazio generato dal vettore* $\mathbf{w}$ *.*

a) *Per ogni* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *, l'immagine* $F(\mathbf{v})$ *è un multiplo scalare (non sempre nullo) del vettore* $\mathbf{w}$ *, dunque*

$$\mathrm{Im} F = W \ .$$

Per mostrare che lo spazio unidimensionale W *è un autospazio, basta ora verificare che* $\mathbf{w}$ *è un autovettore:* $F(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2\mathbf{w}$ *, dunque* W *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_0 = \|\mathbf{w}\|^2$ *.*

Osservato che $\dim \ker F = \dim \mathrm{dom} F - \dim \mathrm{Im} F = 2 \neq 0$ *, possiamo affermare che* $\ker F$ *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_1 = 0$ *.*

b) *Il nucleo e l'immagine di* F *sono sottospazi ortogonali, infatti:*

$$\mathrm{Im} F = W \ , \qquad \ker F = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\} = W^{\perp}$$

(cioè $\ker F$ *è il piano per l'origine la cui direzione ortogonale è individuata da* $\mathbf{w}$ *).*
Considerata una base ortogonale $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ *di* $\ker F$ *, una base ortonormale di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* F *si ottiene normalizzando* $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ *.*

Soluzione, secondo metodo.

Detta $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *, si ha*

$$F(\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{w} \ , \quad F(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{w} \ , \quad F(\mathbf{e}_3) = \sqrt{2}\mathbf{w} \ .$$

La matrice che rappresenta F *rispetto la base canonica è* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *.*

Indichiamo con W *lo spazio generato dal vettore* $\mathbf{w}$ *.*

a) $\mathrm{Im} F$ *è generato dalle colonne di* M *, dunque*

$$\mathrm{Im} F = W \ .$$

Per mostrare che lo spazio unidimensionale W *è un autospazio, basta ora verificare che* $\mathbf{w}$ *è un autovettore:* $F(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2\mathbf{w}$ *, dunque* W *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_0 = \|\mathbf{w}\|^2$ *.*

Osservato che $\dim \ker F = \dim \mathrm{dom} F - \dim \mathrm{Im} F = 2 \neq 0$ *, possiamo affermare che* $\ker F$ *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_1 = 0$ *.*

b) M *è simmetrica e quindi, per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* F *.*

4. ***a***) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x'' - 3x' = \mathrm{e}^{-3t} \\ x'(0) = \dfrac{1}{3} \\ x(0) = \dfrac{1}{9} \end{cases}$.

b) Determinare la soluzione generale dell'equazione $x'' - 3x' = t$.

c) Determinare la soluzione generale dell'equazione $x'' - 3x' = 18t + 5\mathrm{e}^{-3t}$.

Soluzione. *La soluzione generale dell'omogenea* $x'' - 3x' = 0$ *è*

$$x_0(t) = A\mathrm{e}^{3t} + B \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

a) *Una soluzione particolare dell'equazione* $x'' - 3x' = \mathrm{e}^{-3t}$ *può essere cercata del tipo* $\tilde{x}(t) = k\mathrm{e}^{-3t}$. *La soluzioni generale dell'equazione risulta*

$$x_1(t) = A\mathrm{e}^{3t} + B + \frac{1}{18}\mathrm{e}^{-3t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) ,$$

quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{9} + \frac{1}{18}\mathrm{e}^{-3t} .$$

b) *Una soluzione particolare dell'equazione* $x'' - 3x' = t$ *può essere cercata del tipo* $\bar{x}(t) = t(at + b)$. *La soluzioni generale dell'equazione risulta*

$$x_2(t) = A\mathrm{e}^{3t} + B - \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{9}t \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

c) *Per il principio di sovrapposizione, la soluzione generale dell'equazione* $x'' - 3x' = 18t + 5\mathrm{e}^{-3t}$ *è*

$$x_3(t) = A\mathrm{e}^{3t} + B - 3t^2 - 2t + \frac{5}{18}\mathrm{e}^{-3t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale
3+4	3+4	4+4	4+3+3	32

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Prima prova in itinere** **6 maggio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

a) verificare che A è diagonalizzabile;

b) determinare una matrice che diagonalizza A.

Soluzione.

a) *Gli autovalori della matrice triangolare A sono:*
$\lambda_0 = 0$, *autovalore semplice e quindi regolare;*
$\lambda_1 = 6$, *autovalore doppio con molteplicità geometrica* $3 - \mathrm{rk}[A - \lambda_1 I] = 2$, *quindi regolare.*
Tutti gli autovalori di A sono reali e regolari, quindi A è diagonalizzabile.

b) *L'autospazio V_0 relativo a $\lambda_0 = 0$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* $[A-\lambda_0 I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

cioè $\begin{cases} 6x + 7z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. *Una base di V_0 è* $((7, 0, -6)^t)$.

L'autospazio V_1 relativo a $\lambda_1 = 6$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $[A-\lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

cioè $z = 0$. *Una base di V_1 è* $((1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t)$.

Una delle matrici che diagonalizzano A è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$.

2. Sia $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\ , \quad T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1\ , \quad T(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3$$

dove $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire se il vettore $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ appartiene all'immagine $\operatorname{Im} T$.

b) Trovare una base del nucleo $\ker T$. L'applicazione lineare T è iniettiva?

Soluzione.

Rispetto alla base data, la matrice che rappresenta l'applicazione lineare T *è* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$,

mentre le coordinate di $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *sono* $(1, 3, 3)$.

a) *Poiché* $\operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$, *il vettore* $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *appartiene all'immagine* $\operatorname{Im} T$.

b) *Il sistema lineare omogeneo* $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *cioè* $\begin{cases} y + 2z = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$,

ha come soluzioni $\begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \quad (t \in \mathbb{R}) \ . \\ z = t \end{cases}$

Una base di $\ker T$ *è dunque* $(3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

Poiché $\dim \ker T = 1 \neq 0$, *l'applicazione lineare* T *non è iniettiva.*

3. Fissato $\mathbf{w} = \left(1, 0, \sqrt{5}\right)$, sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita: per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$F(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}$$

(dove $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$).

a) Dimostrare che l'immagine $\mathrm{Im}\, F$ e il nucleo $\ker F$ sono autospazi di F e trovare i corrispondenti autovalori.

b) Stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F .

Soluzione, primo metodo.

Indichiamo con W *lo spazio generato dal vettore* $\mathbf{w}$ *.*

a) *Per ogni* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *, l'immagine* $F(\mathbf{v})$ *è un multiplo scalare (non sempre nullo) del vettore* $\mathbf{w}$ *, dunque*

$$\mathrm{Im} F = W \ .$$

Per mostrare che lo spazio unidimensionale W *è un autospazio, basta ora verificare che* $\mathbf{w}$ *è un autovettore:* $F(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2\mathbf{w}$ *, dunque* W *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_0 = \|\mathbf{w}\|^2$ *.*

Osservato che $\dim\ker F = \dim \mathrm{dom} F - \dim \mathrm{Im} F = 2 \neq 0$ *, possiamo affermare che* $\ker F$ *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_1 = 0$ *.*

b) *Il nucleo e l'immagine di* F *sono sottospazi ortogonali, infatti:*

$$\mathrm{Im} F = W \ , \qquad \ker F = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\} = W^{\perp}$$

(cioè $\ker F$ *è il piano per l'origine la cui direzione ortogonale è individuata da* $\mathbf{w}$ *).*
Considerata una base ortogonale $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ *di* $\ker F$ *, una base ortonormale di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* F *si ottiene normalizzando* $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ *.*

Soluzione, secondo metodo.

Detta $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ *la base canonica di* $\mathbb{R}^3$ *, si ha*

$$F(\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{w} \ , \quad F(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{w} \ , \quad F(\mathbf{e}_3) = \sqrt{5}\mathbf{w} \ .$$

La matrice che rappresenta F *rispetto la base canonica è* $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Indichiamo con W *lo spazio generato dal vettore* $\mathbf{w}$ *.*

a) $\mathrm{Im} F$ *è generato dalle colonne di* M *, dunque*

$$\mathrm{Im} F = W \ .$$

Per mostrare che lo spazio unidimensionale W *è un autospazio, basta ora verificare che* $\mathbf{w}$ *è un autovettore:* $F(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2\mathbf{w}$ *, dunque* W *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_0 = \|\mathbf{w}\|^2$ *.*

Osservato che $\dim\ker F = \dim \mathrm{dom} F - \dim \mathrm{Im} F = 2 \neq 0$ *, possiamo affermare che* $\ker F$ *è l'autospazio relativo all'autovalore* $\lambda_1 = 0$ *.*

b) M *è simmetrica e quindi, per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale di* $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* F *.*

4. ***a***) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x'' - 2x' = \mathrm{e}^{-2t} \\ x'(0) = \dfrac{1}{2} \\ x(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

b) Determinare la soluzione generale dell'equazione $x'' - 2x' = t$.

c) Determinare la soluzione generale dell'equazione $x'' - 2x' = 8t + 5\mathrm{e}^{-2t}$.

Soluzione. *La soluzione generale dell'omogenea* $x'' - 2x' = 0$ *è*

$$x_0(t) = A\mathrm{e}^{2t} + B \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

a) *Una soluzione particolare dell'equazione* $x'' - 2x' = \mathrm{e}^{-2t}$ *può essere cercata del tipo* $\tilde{x}(t) = k\mathrm{e}^{-2t}$ *. La soluzioni generale dell'equazione risulta*

$$x_1(t) = A\mathrm{e}^{2t} + B + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) ,$$

quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \frac{3}{8}\mathrm{e}^{2t} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2t} .$$

b) *Una soluzione particolare dell'equazione* $x'' - 2x' = t$ *può essere cercata del tipo* $\bar{x}(t) = t(at + b)$ *. La soluzioni generale dell'equazione risulta*

$$x_2(t) = A\mathrm{e}^{2t} + B - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

c) *Per il principio di sovrapposizione, la soluzione generale dell'equazione* $x'' - 2x' = 8t + 5\mathrm{e}^{-2t}$ *è*

$$x_3(t) = A\mathrm{e}^{2t} + B - 2t^2 - 2t + \frac{5}{8}\mathrm{e}^{-2t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale
3+4	3+4	4+4	4+3+3	32

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Prima prova in itinere** **6 maggio 2013**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

a) verificare che A è diagonalizzabile;

b) determinare una matrice che diagonalizza A .

Soluzione.

a) *Gli autovalori della matrice triangolare A sono:*
$\lambda_0 = 0$ *, autovalore semplice e quindi regolare;*
$\lambda_1 = 5$ *, autovalore doppio con molteplicità geometrica* $3 - \mathrm{rk}[A - \lambda_1 I] = 2$ *, quindi regolare.*
Tutti gli autovalori di A sono reali e regolari, quindi A è diagonalizzabile.

b) *L'autospazio V_0 relativo a $\lambda_0 = 0$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* $[A - \lambda_0 I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

cioè $\begin{cases} 5x + 8z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. *Una base di V_0 è* $((8, 0, -5)^t)$.

L'autospazio V_1 relativo a $\lambda_1 = 5$ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $[A - \lambda_1 I] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

cioè $z = 0$. *Una base di V_1 è* $((1, 0, 0)^t, (0, 1, 0)^t)$.

Una delle matrici che diagonalizzano A è $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$.

2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$T(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 \ , \quad T(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1 \ , \quad T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2 - 4\mathbf{e}_3$$

dove $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

a) Stabilire se il vettore $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ appartiene all'immagine $\operatorname{Im} T$.

b) Trovare una base del nucleo $\ker T$. L'applicazione lineare T è iniettiva?

Soluzione.

Rispetto alla base data, la matrice che rappresenta l'applicazione lineare T *è* $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$,

mentre le coordinate di $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *sono* $(1, 3, 3)$.

a) *Poiché* $\operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, *il vettore* $\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$ *appartiene all'immagine* $\operatorname{Im} T$.

b) *Il sistema lineare omogeneo* $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *cioè* $\begin{cases} y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$,

ha come soluzioni $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Una base di $\ker T$ *è dunque* $(2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$.

Poiché $\dim \ker T = 1 \neq 0$, *l'applicazione lineare* T *non è iniettiva.*

3. Fissato $\mathbf{w} = \left(1, 0, \sqrt{6}\right)$, sia $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare così definita: per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$,

$$F(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}$$

(dove $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ denota il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$).

a) Dimostrare che l'immagine $\operatorname{Im} F$ e il nucleo $\ker F$ sono autospazi di F e trovare i corrispondenti autovalori.

b) Stabilire se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F.

Soluzione, primo metodo.

Indichiamo con W lo spazio generato dal vettore $\mathbf{w}$.

a) *Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, l'immagine $F(\mathbf{v})$ è un multiplo scalare (non sempre nullo) del vettore $\mathbf{w}$, dunque*

$$\mathrm{Im}F = W \,.$$

Per mostrare che lo spazio unidimensionale W è un autospazio, basta ora verificare che $\mathbf{w}$ è un autovettore: $F(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2\mathbf{w}$, dunque W è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_0 = \|\mathbf{w}\|^2$.

Osservato che $\dim\ker F = \dim \mathrm{dom}F - \dim \mathrm{Im}F = 2 \neq 0$, possiamo affermare che $\ker F$ è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

b) *Il nucleo e l'immagine di F sono sottospazi ortogonali, infatti:*

$$\mathrm{Im}F = W \,, \qquad \ker F = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0\} = W^{\perp}$$

(cioè $\ker F$ è il piano per l'origine la cui direzione ortogonale è individuata da $\mathbf{w}$).
Considerata una base ortogonale $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ di $\ker F$, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F si ottiene normalizzando $(\mathbf{w}, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$.

Soluzione, secondo metodo.

Detta $\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha

$$F(\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{w} \,, \quad F(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{w} \,, \quad F(\mathbf{e}_3) = \sqrt{6}\mathbf{w} \,.$$

La matrice che rappresenta F rispetto la base canonica è $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{6} & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Indichiamo con W lo spazio generato dal vettore $\mathbf{w}$.

a) $\mathrm{Im}F$ *è generato dalle colonne di M, dunque*

$$\mathrm{Im}F = W \,.$$

Per mostrare che lo spazio unidimensionale W è un autospazio, basta ora verificare che $\mathbf{w}$ è un autovettore: $F(\mathbf{w}) = \|\mathbf{w}\|^2\mathbf{w}$, dunque W è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_0 = \|\mathbf{w}\|^2$.

Osservato che $\dim\ker F = \dim \mathrm{dom}F - \dim \mathrm{Im}F = 2 \neq 0$, possiamo affermare che $\ker F$ è l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$.

b) *M è simmetrica e quindi, per il teorema spettrale, esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di F.*

4. ***a***) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x'' + 2x' = \mathrm{e}^{2t} \\ x'(0) = \dfrac{1}{2} \\ x(0) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

b) Determinare la soluzione generale dell'equazione $x'' + 2x' = t$.

c) Determinare la soluzione generale dell'equazione $x'' + 2x' = 8t - 5\mathrm{e}^{2t}$.

Soluzione. *La soluzione generale dell'omogenea* $x'' + 2x' = 0$ *è*

$$x_0(t) = A\mathrm{e}^{-2t} + B \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

a) *Una soluzione particolare dell'equazione* $x'' + 2x' = \mathrm{e}^{2t}$ *può essere cercata del tipo* $\tilde{x}(t) = k\mathrm{e}^{2t}$. *La soluzioni generale dell'equazione risulta*

$$x_1(t) = A\mathrm{e}^{-2t} + B + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) ,$$

quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = -\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2t} .$$

b) *Una soluzione particolare dell'equazione* $x'' + 2x' = t$ *può essere cercata del tipo* $\bar{x}(t) = t(at + b)$. *La soluzioni generale dell'equazione risulta*

$$x_2(t) = A\mathrm{e}^{-2t} + B + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$

c) *Per il principio di sovrapposizione, la soluzione generale dell'equazione* $x'' + 2x' = 8t - 5\mathrm{e}^{2t}$ *è*

$$x_3(t) = A\mathrm{e}^{-2t} + B + 2t^2 - 2t - \frac{5}{8}\mathrm{e}^{2t} \qquad (A, B \in \mathbb{R}) .$$