

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 Docente:		Seconda prova in itinere 1 luglio 2013
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Sia data la funzione

$$f(x, y) = y\sqrt[3]{x}.$$

- Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e in caso affermativo calcolarle.
- Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
- Stabilire se esistono i piani tangenti al grafico di f nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ e $(1, 1, f(1, 1))$. In caso affermativo scriverne le equazioni.

Soluzione.

- Risulta $f(0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Analogamente, risulta $f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

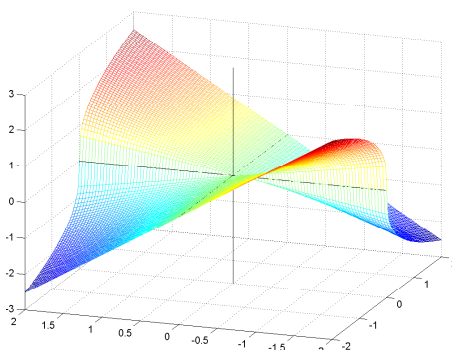


Figura 1: Grafico della superficie $z = y\sqrt[3]{x}$

- f è differenziabile nell'origine: infatti, utilizzando il passaggio in coordinate polari,

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k\sqrt[3]{h}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \theta \sqrt[3]{\rho \cos \theta}}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1/3} \sin \theta \sqrt[3]{\cos \theta} = 0. \end{aligned}$$

- Il piano tangente a f in $(0, 0, f(0, 0))$ è il piano $z = 0$. Il piano tangente ad f in $(1, 1, f(1, 1))$ è il piano $z = x/3 + y - 1/3$.

2. Sia assegnata la funzione $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Determinare i punti stazionari di f .
- (b) Disegnare il settore circolare A chiuso e limitato, contenuto nel primo quadrante, limitato dall'asse x , dalla retta $y = \sqrt{3}x$ e dalla circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 2. Trovare quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ su A .

Soluzione.

- (a) La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti del suo dominio. I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ f_y = x(4 - x^2 - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_{1,2} = (0, \pm 2)$, $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$, $P_{5,6,7,8} = (\pm 1, \pm 1)$.

- (b) L'insieme A è rappresentato in giallo nella figura.

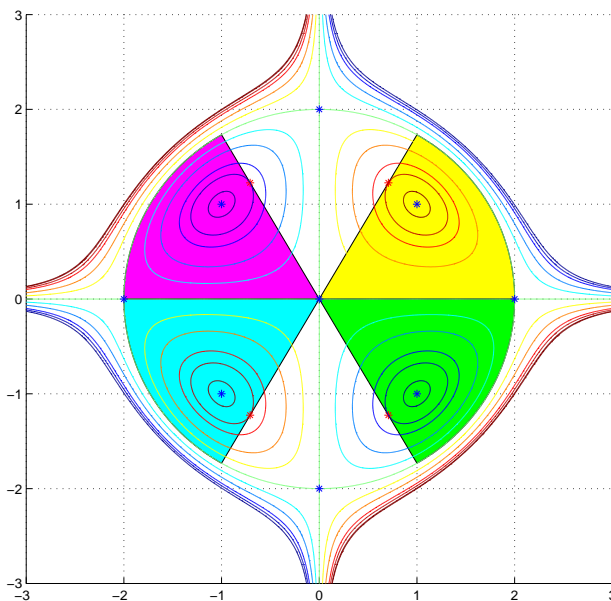


Figura 2: Linee di livello della superficie $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$.

L'unico punto stazionario interno ad A è $P_5 = (1, 1)$. Si deduce direttamente che P_5 è punto di massimo assoluto per f vincolata ad A , infatti f è positiva nei punti interni al quarto di cerchio nel primo quadrante e nulla sul suo bordo. Si deduce che

$$\max_A f(x, y) = f(1, 1) = 2 \quad \text{e} \quad \min_A f(x, y) = 0.$$

I conti (pur corretti) che gli studenti possono evitare sono: il calcolo della matrice Hessiana in P_5 ovvero

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

definita negativa e la ricerca del massimo di f vincolato alla linea $y = \sqrt{3}x$, con $0 < x < 1$. Poiché il vincolo è esplicitabile, possiamo ricondurre il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione libera in una variabile per la funzione $z = 4\sqrt{3}x^2(1 - x^2)$. Troviamo $z' = 8\sqrt{3}x(1 - 2x^2)$. Il punto di massimo vincolato all'unico tratto di bordo in cui la funzione assegnata non è nulla è quindi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

dove la funzione f assume il valore $\sqrt{3}$, che naturalmente è inferiore al massimo.

3. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq y \leq z + 2\}$.

(a) Calcolare il volume di S .

(b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} - xy \mathbf{j} + (2 - x)z \mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S .

Soluzione.

(a) Passiamo a coordinate cilindriche rispetto all'asse y , ovvero poniamo $x = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$, $y = t$. La regione S si trasforma nella regione $S' = \{(\varrho, \vartheta, t), 1 \leq \varrho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2 + \varrho \sin \vartheta\}$. Indicando con $|S|$ il volume di S si ha:

$$\begin{aligned} |S| &= \iiint_{S'} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta \, dt = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 \varrho \left(\int_0^{2+\varrho \sin \vartheta} dt \right) d\varrho \right] d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 \varrho (2 + \varrho \sin \vartheta) d\varrho \right] d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\varrho^2 + \frac{\varrho^3}{3} \sin \vartheta \right]_{\varrho=1}^{\varrho=2} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(3 + \frac{7}{3} \sin \vartheta \right) d\vartheta \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

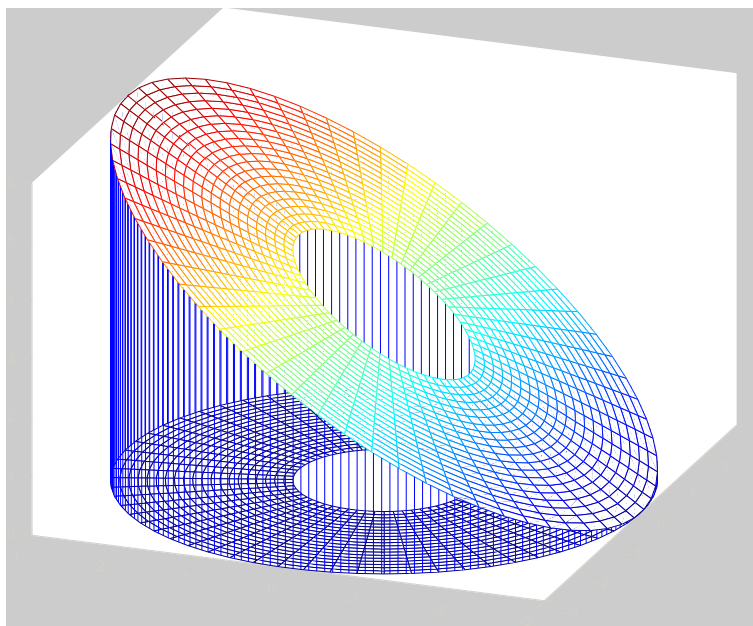


Figura 3: Il solido S .

(b) Sono verificate le condizioni del teorema della divergenza. Si ha $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x - x + 2 - x = 2$. Dunque, indicato con \mathbf{n} il versore normale uscente da ∂S e con dA l'elemento d'area, si ha:

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = 2|S| = 12\pi.$$

4. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale \mathbf{F}_a su \mathbb{R}^3 definito da $\mathbf{F}_a(x, y, z) = (x + az)\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + (3z + x)\mathbf{k}$.

- (a) Mostrare che esiste un solo valore del parametro a tale che \mathbf{F}_a sia conservativo, determinare tale valore e calcolare, per tale scelta di a , un potenziale di \mathbf{F}_a ;
 (b) calcolare, per ogni valore di a , il lavoro del campo \mathbf{F}_a lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, 0, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Soluzione.

- (a) Il dominio di definizione di \mathbf{F}_a è semplicemente connesso e \mathbf{F}_a è di classe C^∞ , dunque \mathbf{F}_a è conservativo se e solo se $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$. Per verificare per quali valori di a ciò accada, notiamo che $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial y} = 0$, mentre $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial z} = a$ e $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial x} = 1$. Si ha dunque che $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a calcoliamo un potenziale U (necessariamente esso risulterà di classe C^∞). Dovrà valere

$$x + z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad -2y = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad 3z + x = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

La prima equazione implica che $U(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xz + \varphi_1(y, z)$, con φ_1 di classe C^∞ . La seconda allora implica che $\varphi_1(y, z) = -y^2 + \varphi_2(z)$, con φ_2 di classe C^∞ . La terza infine implica che $\varphi_2(z) = \frac{3}{2}z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione un potenziale è dato, ponendo ad esempio $c = 0$, da $U(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + xz - y^2 + \frac{3}{2}z^2$.

- (b) Applichiamo il teorema di Stokes, notando che la circonferenza assegnata è il bordo, ad esempio, del cerchio Σ di raggio $R = 1$ centrato nell'origine e contenuto nel piano $y = 0$. Tale superficie ha come versori normali $\pm\mathbf{j}$ e, dato il verso di percorrenza assegnato al cammino, nell'utilizzo del teorema di Stokes va scelto il versore $\mathbf{n} = -\mathbf{j}$. Notiamo che $\nabla \times \mathbf{F}_a = (a - 1)\mathbf{j}$, così che si ha, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} (a - 1)\mathbf{j} \cdot (-\mathbf{j}) dS = (1 - a) \iint_{\Sigma} dS = \pi(1 - a).$$

Si noti che in particolare il flusso è nullo quando $a = 1$, fatto che poteva essere notato senza calcolo alcuno come conseguenza del punto precedente.

N.B. Il lavoro richiesto poteva anche essere calcolato direttamente.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 Docente:		Seconda prova in itinere 1 luglio 2013
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Sia data la funzione

$$f(x, y) = x\sqrt[5]{y}.$$

- Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e in caso affermativo calcolarle.
- Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
- Stabilire se esistono i piani tangenti al grafico di f nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ e $(1, 1, f(1, 1))$. In caso affermativo scriverne le equazioni.

Soluzione.

- Risulta $f(0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Analogamente, risulta $f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

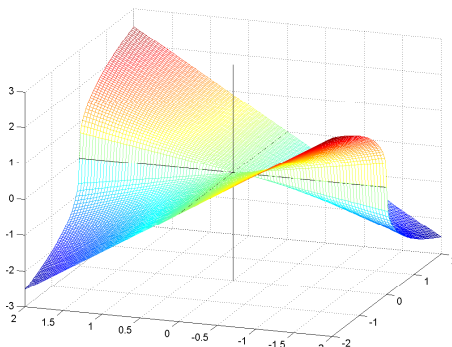


Figura 1: Grafico della superficie $z = x\sqrt[5]{y}$

- f è differenziabile nell'origine: infatti, utilizzando il passaggio in coordinate polari,

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h\sqrt[5]{k}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \sqrt[5]{\rho \sin \theta}}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1/5} \cos \theta \sqrt[5]{\sin \theta} = 0. \end{aligned}$$

- Il piano tangente a f in $(0, 0, f(0, 0))$ è il piano $z = 0$. Il piano tangente ad f in $(1, 1, f(1, 1))$ è il piano $z = x + y/5 - 1/5$.

2. Sia assegnata la funzione $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Determinare i punti stazionari di f .
 (b) Disegnare il settore circolare A chiuso e limitato, contenuto nel secondo quadrante, limitato dall'asse x , dalla retta $y = -\sqrt{3}x$ e dalla circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 2. Trovare quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ su A .

Soluzione.

- (a) La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti del suo dominio. I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ f_y = x(4 - x^2 - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_{1,2} = (0, \pm 2)$, $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$, $P_{5,6,7,8} = (\pm 1, \pm 1)$.

- (b) L'insieme A è rappresentato in magenta nella figura.

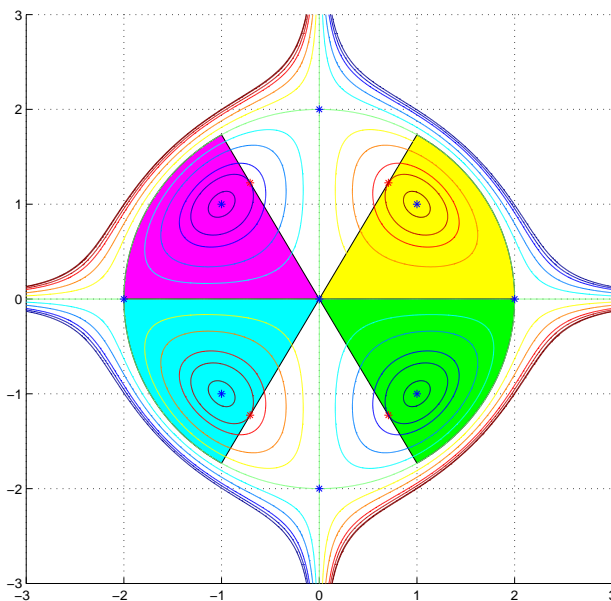


Figura 2: Linee di livello della superficie $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$.

L'unico punto stazionario interno ad A è $P_6 = (-1, 1)$. Si deduce direttamente che P_6 è punto di minimo assoluto per f vincolata ad A , infatti f è negativa nei punti interni al quarto di cerchio nel secondo quadrante e nulla sul suo bordo. Si deduce che

$$\min_A f(x, y) = f(-1, 1) = -2 \quad \text{e} \quad \max_A f(x, y) = 0.$$

I conti (pur corretti) che gli studenti possono evitare sono: il calcolo della matrice Hessiana in P_6 ovvero

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

definita positiva e la ricerca del minimo di f vincolato alla linea $y = -\sqrt{3}x$, con $-1 < x < 0$. Poiché il vincolo è esplicitabile, possiamo ricondurre il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione libera in una variabile per la funzione $z = -4\sqrt{3}x^2(1 - x^2)$. Troviamo $z' = 8\sqrt{3}x(2x^2 - 1)$. Il punto di minimo vincolato all'unico tratto di bordo in cui la funzione assegnata non è nulla è quindi

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

dove la funzione f assume il valore $-\sqrt{3}$, che naturalmente è superiore al minimo.

3. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq x^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq y \leq z + 3\}$.

(a) Calcolare il volume di S .

(b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = -xy \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (y - 3)z \mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S .

Soluzione.

(a) Passiamo a coordinate cilindriche rispetto all'asse y , ovvero poniamo $x = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$, $y = t$. La regione S si trasforma nella regione $S' = \{(\varrho, \vartheta, t), 1 \leq \varrho \leq 3, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 3 + \varrho \sin \vartheta\}$. Indicando con $|S|$ il volume di S si ha:

$$\begin{aligned} |S| &= \iiint_{S'} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta \, dt = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^3 \varrho \left(\int_0^{3+\varrho \sin \vartheta} dt \right) d\varrho \right] d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^3 \varrho (3 + \varrho \sin \vartheta) d\varrho \right] d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} \varrho^2 + \frac{\varrho^3}{3} \sin \vartheta \right]_{\varrho=1}^{\varrho=3} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(12 + \frac{26}{3} \sin \vartheta \right) d\vartheta \\ &= 24\pi. \end{aligned}$$

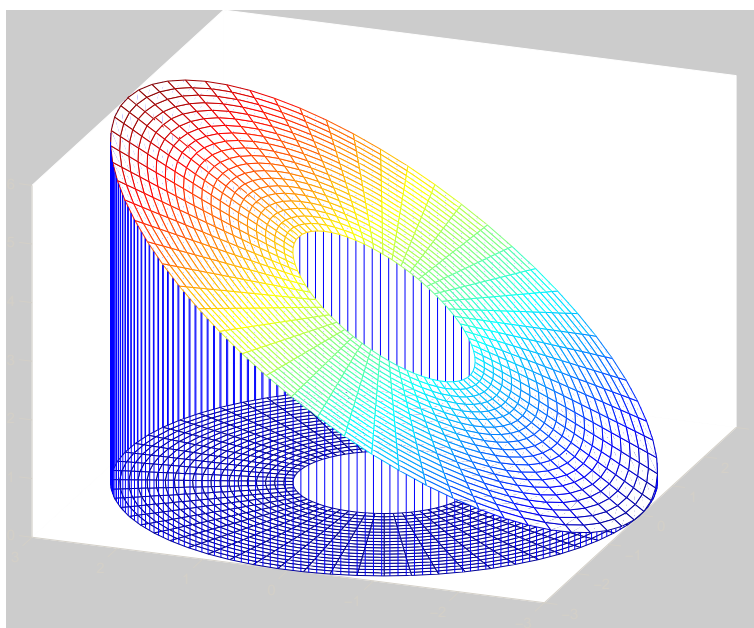


Figura 3: Il solido S .

(b) Sono verificate le condizioni del teorema della divergenza. Si ha $\nabla \cdot \mathbf{F} = -y + 2y - y + 3 = 3$. Dunque, indicato con \mathbf{n} il versore normale uscente da ∂S e con dA l'elemento d'area, si ha:

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = 3|S| = 72\pi.$$

4. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale \mathbf{F}_a su \mathbb{R}^3 definito da $\mathbf{F}_a(x, y, z) = (3x + y)\mathbf{i} + (y + ax)\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$.

- (a) Mostrare che esiste un solo valore del parametro a tale che \mathbf{F}_a sia conservativo, determinare tale valore e calcolare, per tale scelta di a , un potenziale di \mathbf{F}_a ;
- (b) calcolare, per ogni valore di a , il lavoro del campo \mathbf{F}_a lungo la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $t \in [0, 2\pi]$

Soluzione.

1. Il dominio di definizione di \mathbf{F}_a è semplicemente connesso e \mathbf{F}_a è di classe C^∞ , dunque \mathbf{F}_a è conservativo se e solo se $\nabla \times \mathbf{F}_a = \mathbf{0}$. Per verificare per quali valori di a ciò accada, notiamo che $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial y} = 0$, mentre $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial y} = 1$ e $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial x} = a$. Si ha dunque che $\nabla \times \mathbf{F}_a = \mathbf{0}$ se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a calcoliamo un potenziale U (necessariamente esso risulterà di classe C^∞). Dovrà valere

$$3x + y = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad y + x = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad -2z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

La prima equazione implica che $U(x, y, z) = \frac{3}{2}x^2 + xy + \varphi_1(y, z)$, con φ_1 di classe C^∞ . La terza allora implica che $\varphi_1(y, z) = -z^2 + \varphi_2(y)$, con φ_2 di classe C^∞ . La seconda infine implica che $\varphi_2(y) = \frac{1}{2}y^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione un potenziale è dato, ponendo ad esempio $c = 0$, da $U(x, y, z) = \frac{3}{2}x^2 + xy - z^2 + \frac{1}{2}y^2$.

2. Applichiamo il teorema di Stokes, notando che la circonferenza assegnata è il bordo, ad esempio, del cerchio Σ di raggio $R = 1$ centrato nell'origine e contenuto nel piano $z = 0$. Tale superficie ha come versori normali $\pm\mathbf{k}$ e, dato il verso di percorrenza assegnato al cammino, nell'utilizzo del teorema di Stokes va scelto il versore $\mathbf{n} = \mathbf{k}$. Notiamo che $\nabla \times \mathbf{F}_a = (a - 1)\mathbf{k}$, così che si ha, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} (a - 1)\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} dS = (a - 1) \iint_{\Sigma} dS = \pi(a - 1).$$

Si noti che in particolare il flusso è nullo quando $a = 1$, fatto che poteva essere notato senza calcolo alcuno come conseguenza del punto precedente.

N.B. Il lavoro richiesto poteva anche essere calcolato direttamente.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 Docente:		Seconda prova in itinere 1 luglio 2013
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Sia data la funzione

$$f(x, y) = y\sqrt[5]{x}.$$

- (a) Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e in caso affermativo calcolarle.
 (b) Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
 (c) Stabilire se esistono i piani tangenti al grafico di f nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ e $(-1, -1, f(-1, -1))$. In caso affermativo scriverne le equazioni.

Soluzione.

- (a) Risulta $f(0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Analogamente, risulta $f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

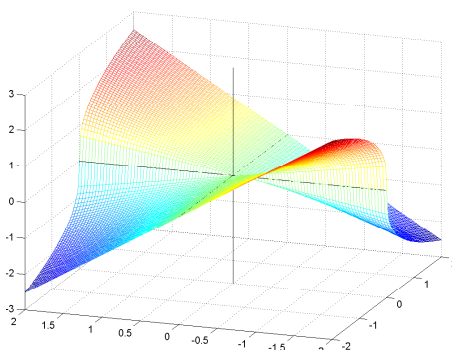


Figura 1: Grafico della superficie $z = y\sqrt[5]{x}$

- (b) f è differenziabile nell'origine: infatti, utilizzando il passaggio in coordinate polari,

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{k\sqrt[5]{h}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \theta \sqrt[5]{\rho \cos \theta}}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1/5} \sin \theta \sqrt[5]{\cos \theta} = 0. \end{aligned}$$

- (c) Il piano tangente a f in $(0, 0, f(0, 0))$ è il piano $z = 0$. Il piano tangente ad f in $(-1, -1, f(-1, -1))$ è il piano $z = -x/5 - y - 1/5$.

2. Sia assegnata la funzione $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Determinare i punti stazionari di f .
- (b) Disegnare il settore circolare A chiuso e limitato, contenuto nel terzo quadrante, limitato dall'asse x , dalla retta $y = \sqrt{3}x$ e dalla circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 2. Trovare quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ su A .

Soluzione.

- (a) La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti del suo dominio. I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ f_y = x(4 - x^2 - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_{1,2} = (0, \pm 2)$, $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$, $P_{5,6,7,8} = (\pm 1, \pm 1)$.

- (b) L'insieme A è rappresentato in ciano nella figura.

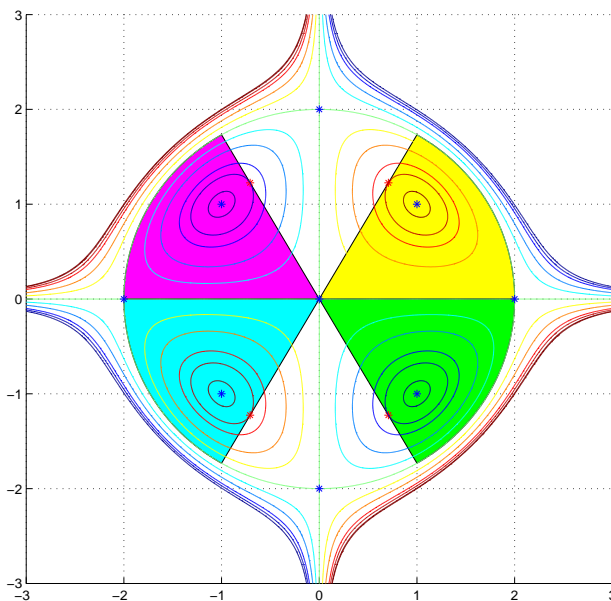


Figura 2: Linee di livello della superficie $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$.

L'unico punto stazionario interno ad A è $P_7 = (-1, -1)$. Si deduce direttamente che P_7 è punto di massimo assoluto per f vincolata ad A , infatti f è positiva nei punti interni al quarto di cerchio nel terzo quadrante e nulla sul suo bordo. Si deduce che

$$\max_A f(x, y) = f(-1, -1) = 2 \quad \text{e} \quad \min_A f(x, y) = 0.$$

I conti (pur corretti) che gli studenti possono evitare sono: il calcolo della matrice Hessiana in P_5 ovvero

$$\begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$$

definita negativa e la ricerca del massimo di f vincolato alla linea $y = \sqrt{3}x$, con $-1 < x < 0$. Poiché il vincolo è esplicitabile, possiamo ricondurre il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione libera in una variabile per la funzione $z = 4\sqrt{3}x^2(1 - x^2)$. Troviamo $z' = 8\sqrt{3}x(1 - 2x^2)$. Il punto di massimo vincolato all'unico tratto di bordo in cui la funzione assegnata non è nulla è quindi

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

dove la funzione f assume il valore $\sqrt{3}$, che naturalmente è inferiore al massimo.

3. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq x \leq z + 2\}$.

(a) Calcolare il volume di S .

(b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x(4 - z)\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S .

Soluzione.

(a) Passiamo a coordinate cilindriche rispetto all'asse x , ovvero poniamo $y = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$, $x = t$. La regione S si trasforma nella regione $S' = \{(\varrho, \vartheta, t), 1 \leq \varrho \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2 + \varrho \sin \vartheta\}$. Indicando con $|S|$ il volume di S si ha:

$$\begin{aligned} |S| &= \iiint_{S'} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta \, dt = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 \varrho \left(\int_0^{2+\varrho \sin \vartheta} dt \right) d\varrho \right] d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^2 \varrho (2 + \varrho \sin \vartheta) d\varrho \right] d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\varrho^2 + \frac{\varrho^3}{3} \sin \vartheta \right]_{\varrho=1}^{\varrho=2} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(3 + \frac{7}{3} \sin \vartheta \right) d\vartheta \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

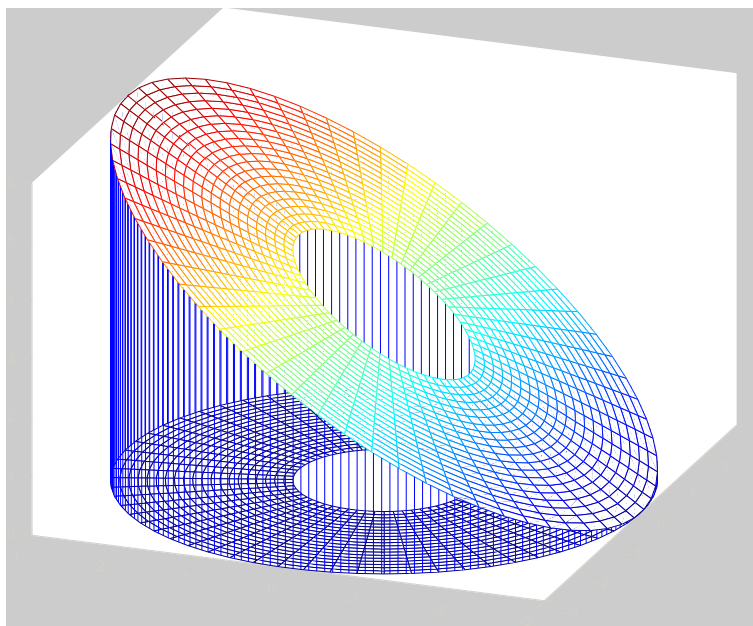


Figura 3: Il solido S .

(b) Sono verificate le condizioni del teorema della divergenza. Si ha $\nabla \cdot \mathbf{F} = 4 - z - z + 2z = 4$. Dunque, indicato con \mathbf{n} il versore normale uscente da ∂S e con dA l'elemento d'area, si ha:

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = 4|S| = 24\pi.$$

4. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale \mathbf{F}_a su \mathbb{R}^3 definito da $\mathbf{F}_a(x, y, z) = -2x \mathbf{i} + (3y + z) \mathbf{j} + (z + ay) \mathbf{k}$.

- (a) Mostrare che esiste un solo valore del parametro a tale che \mathbf{F}_a sia conservativo, determinare tale valore e calcolare, per tale scelta di a , un potenziale di \mathbf{F}_a ;
 (b) calcolare, per ogni valore di a , il lavoro del campo \mathbf{F}_a lungo la curva $\gamma(t) = (0, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Soluzione.

1. Il dominio di definizione di \mathbf{F}_a è semplicemente connesso e \mathbf{F}_a è di classe C^∞ , dunque \mathbf{F}_a è conservativo se e solo se $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$. Per verificare per quali valori di a ciò accada, notiamo che $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial x} = 0$, mentre $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial z} = 1$ e $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial y} = a$. Si ha dunque che $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a calcoliamo un potenziale U (necessariamente esso risulterà di classe C^∞). Dovrà valere

$$-2x = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad 3y + z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad z + y = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

La prima equazione implica che $U(x, y, z) = -x^2 + \varphi_1(y, z)$, con φ_1 di classe C^∞ . La seconda allora implica che $\varphi_1(y, z) = \frac{3}{2}y^2 + zy + \varphi_2(z)$, con φ_2 di classe C^∞ . La terza infine implica che $\varphi_2(z) = \frac{1}{2}z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione un potenziale è dato, ponendo ad esempio $c = 0$, da $U(x, y, z) = -x^2 + \frac{3}{2}y^2 + zy + \frac{1}{2}z^2$.

2. Applichiamo il teorema di Stokes, notando che la circonferenza assegnata è il bordo, ad esempio, del cerchio Σ di raggio $R = 1$ centrato nell'origine e contenuto nel piano $x = 0$. Tale superficie ha come versori normali $\pm \mathbf{i}$ e, dato il verso di percorrenza assegnato al cammino, nell'utilizzo del teorema di Stokes va scelto il versore $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Notiamo che $\nabla \times \mathbf{F}_a = (a - 1) \mathbf{i}$, così che si ha, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} (a - 1) \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} dS = (a - 1) \iint_{\Sigma} dS = \pi(a - 1).$$

Si noti che in particolare il flusso è nullo quando $a = 1$, fatto che poteva essere notato senza calcolo alcuno come conseguenza del punto precedente.

N.B. Il lavoro richiesto poteva anche essere calcolato direttamente.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 Docente:		Seconda prova in itinere 1 luglio 2013
Cognome:	Nome:	Matricola:

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Sia data la funzione

$$f(x, y) = x\sqrt[3]{y}.$$

- Stabilire se esistono le derivate parziali di f nell'origine, e in caso affermativo calcolarle.
- Stabilire se f è differenziabile nell'origine.
- Stabilire se esistono i piani tangenti al grafico di f nei punti $(0, 0, f(0, 0))$ e $(-1, -1, f(-1, -1))$. In caso affermativo scriverne le equazioni.

Soluzione.

- Risulta $f(0, y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Analogamente, risulta $f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$.

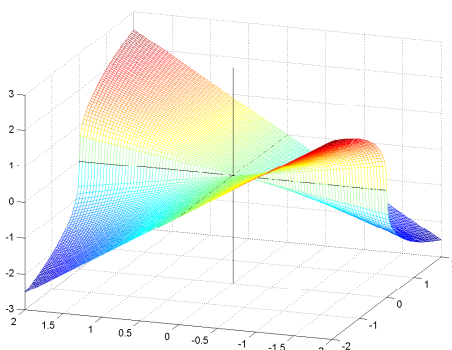


Figura 1: Grafico della superficie $z = x\sqrt[3]{y}$

- f è differenziabile nell'origine: infatti, utilizzando il passaggio in coordinate polari,

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{h\sqrt[3]{k}}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \sqrt[3]{\rho \sin \theta}}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{1/3} \cos \theta \sqrt[3]{\sin \theta} = 0. \end{aligned}$$

- Il piano tangente a f in $(0, 0, f(0, 0))$ è il piano $z = 0$. Il piano tangente ad f in $(-1, -1, f(-1, -1))$ è il piano $z = -x - y/3 - 1/3$.

2. Sia assegnata la funzione $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- (a) Determinare i punti stazionari di f .
- (b) Disegnare il settore circolare A chiuso e limitato, contenuto nel quarto quadrante, limitato dall'asse x , dalla retta $y = -\sqrt{3}x$ e dalla circonferenza centrata in $(0, 0)$ e di raggio 2. Trovare quindi il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x, y)$ su A .

Soluzione.

- (a) La funzione è continua e differenziabile in tutti i punti del suo dominio. I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x = y(4 - 3x^2 - y^2) = 0 \\ f_y = x(4 - x^2 - 3y^2) = 0. \end{cases}$$

Si trovano i punti $P_0 = (0, 0)$, $P_{1,2} = (0, \pm 2)$, $P_{3,4} = (\pm 2, 0)$, $P_{5,6,7,8} = (\pm 1, \pm 1)$.

- (b) L'insieme A è rappresentato in verde nella figura.

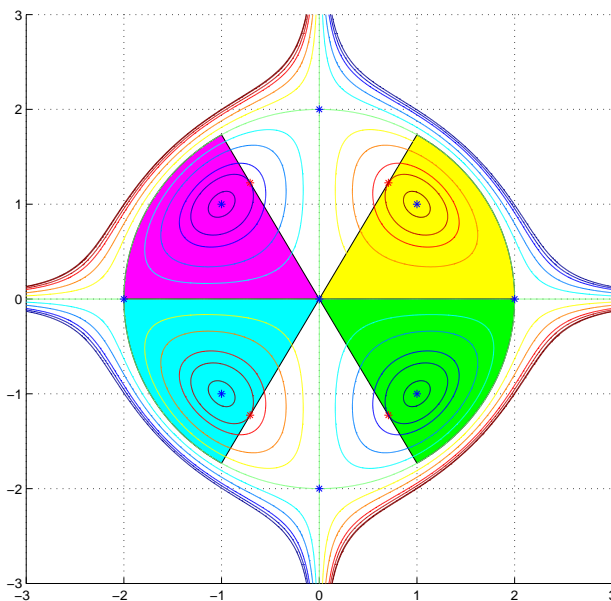


Figura 2: Linee di livello della superficie $f(x, y) = xy(4 - x^2 - y^2)$.

L'unico punto stazionario interno ad A è $P_8 = (1, -1)$. Si deduce direttamente che P_8 è minimo assoluto per f vincolata ad A , infatti f è negativa nei punti interni al quarto di cerchio nel quarto quadrante e nulla sul suo bordo. Si deduce che

$$\min_A f(x, y) = f(1, -1) = -2 \quad \text{e} \quad \max_A f(x, y) = 0.$$

I conti (pur corretti) che gli studenti possono evitare sono: il calcolo della matrice Hessiana in P_6 ovvero

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

definita positiva e la ricerca del minimo di f vincolato alla linea $y = -\sqrt{3}x$, con $0 < x < 1$. Poiché il vincolo è esplicitabile, possiamo ricondurre il problema di ottimizzazione vincolata a un problema di ottimizzazione libera in una variabile per la funzione $z = -4\sqrt{3}x^2(1 - x^2)$. Troviamo $z' = 8\sqrt{3}x(2x^2 - 1)$. Il punto di minimo vincolato all'unico tratto di bordo in cui la funzione assegnata non è nulla è quindi

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

dove la funzione f assume il valore $-\sqrt{3}$, che naturalmente è superiore al minimo.

3. Si consideri il solido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 1 \leq y^2 + z^2 \leq 9, 0 \leq x \leq z + 3\}$.

(a) Calcolare il volume di S .

(b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = x^2 \mathbf{i} + y(5 - x) \mathbf{j} - xz \mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S .

Soluzione.

(a) Passiamo a coordinate cilindriche rispetto all'asse x , ovvero poniamo $y = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$, $x = t$. La regione S si trasforma nella regione $S' = \{(\varrho, \vartheta, t), 1 \leq \varrho \leq 3, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 3 + \varrho \sin \vartheta\}$. Indicando con $|S|$ il volume di S si ha:

$$\begin{aligned} |S| &= \iiint_{S'} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta \, dt = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^3 \varrho \left(\int_0^{3+\varrho \sin \vartheta} dt \right) d\varrho \right] d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^3 \varrho (3 + \varrho \sin \vartheta) d\varrho \right] d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3}{2} \varrho^2 + \frac{\varrho^3}{3} \sin \vartheta \right]_{\varrho=1}^{\varrho=3} d\vartheta = \int_0^{2\pi} \left(12 + \frac{26}{3} \sin \vartheta \right) d\vartheta \\ &= 24\pi. \end{aligned}$$

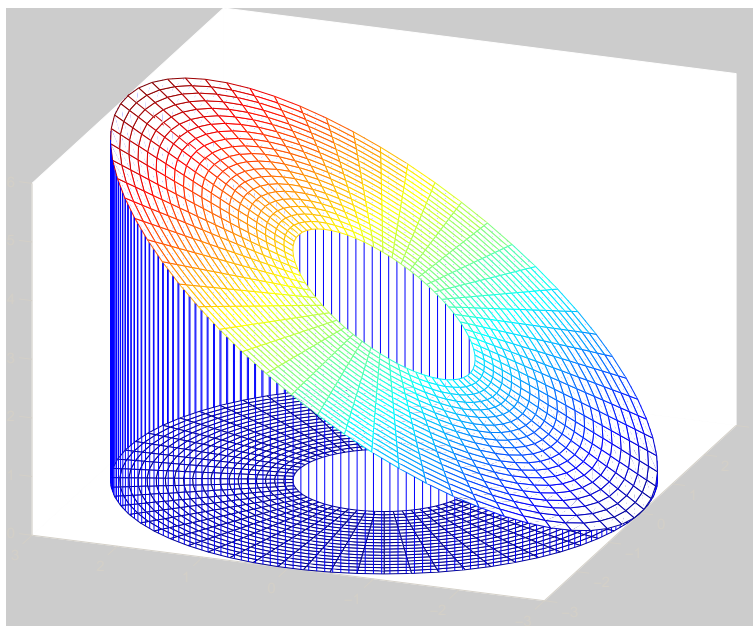


Figura 3: Il solido S .

(b) Sono verificate le condizioni del teorema della divergenza. Si ha $\nabla \cdot \mathbf{F} = 2x + 5 - x - x = 5$. Dunque, indicato con \mathbf{n} il versore normale uscente da ∂S e con dA l'elemento d'area, si ha:

$$\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dA = \iiint_S \nabla \cdot \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz = 5|S| = 120\pi.$$

4. Si consideri, al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il campo vettoriale \mathbf{F}_a su \mathbb{R}^3 definito da $\mathbf{F}_a(x, y, z) = -2x \mathbf{i} + (y + az) \mathbf{j} + (3z + y) \mathbf{k}$.
- (a) Mostrare che esiste un solo valore del parametro a tale che \mathbf{F}_a sia conservativo, determinare tale valore e calcolare, per tale scelta di a , un potenziale di \mathbf{F}_a ;
- (b) calcolare, per ogni valore di a , il lavoro del campo \mathbf{F}_a lungo la curva $\gamma(t) = (0, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

Soluzione.

1. Il dominio di definizione di \mathbf{F}_a è semplicemente connesso e \mathbf{F}_a è di classe C^∞ , dunque \mathbf{F}_a è conservativo se e solo se $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$. Per verificare per quali valori di a ciò accada, notiamo che $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial y} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_1}{\partial z} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial x} = \frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial x} = 0$, mentre $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_2}{\partial z} = a$ e $\frac{\partial(\mathbf{F}_a)_3}{\partial y} = 1$. Si ha dunque che $\nabla \times \mathbf{F}_a = 0$ se e solo se $a = 1$. Per tale valore di a calcoliamo un potenziale U (necessariamente esso risulterà di classe C^∞). Dovrà valere

$$-2x = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial x}, \quad y + z = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial y}, \quad 3z + y = \frac{\partial U(x, y, z)}{\partial z}.$$

La prima equazione implica che $U(x, y, z) = -x^2 + \varphi_1(y, z)$, con φ_1 di classe C^∞ . La seconda allora implica che $\varphi_1(y, z) = \frac{1}{2}y^2 + zy + \varphi_2(z)$, con φ_2 di classe C^∞ . La terza infine implica che $\varphi_2(z) = \frac{3}{2}z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. In conclusione un potenziale è dato, ponendo ad esempio $c = 0$, da $U(x, y, z) = -x^2 + \frac{1}{2}y^2 + zy + \frac{3}{2}z^2$.

2. Applichiamo il teorema di Stokes, notando che la circonferenza assegnata è il bordo, ad esempio, del cerchio Σ di raggio $R = 1$ centrato nell'origine e contenuto nel piano $x = 0$. Tale superficie ha come versori normali $\pm \mathbf{i}$ e, dato il verso di percorrenza assegnato al cammino, nell'utilizzo del teorema di Stokes va scelto il versore $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Notiamo che $\nabla \times \mathbf{F}_a = (1 - a) \mathbf{i}$, così che si ha, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}_a \cdot d\mathbf{x} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}_a) \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{\Sigma} (1 - a) \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} dS = (1 - a) \iint_{\Sigma} dS = \pi(1 - a).$$

Si noti che in particolare il flusso è nullo quando $a = 1$, fatto che poteva essere notato senza calcolo alcuno come conseguenza del punto precedente.

N.B. Il lavoro richiesto poteva anche essere calcolato direttamente.