Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Secondo appello** **13–09–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Si considerino la funzione $q(x,y) = x^2 + 8xy + y^2$ e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (a) Spiegare perché D è chiuso e limitato e perché q è continua su D .

   (b) Dire se esiste un punto $(x_0, y_0) \in D$ che soddisfi la seguente condizione:

   $$\forall (x,y) \in D \,, \quad q(x,y) \leq q(x_0, y_0).$$

   (c) Trovare, se esiste, il valore massimo di q su D .

2. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = -\ln\sqrt{x^2+y^2}$$

definita sul piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) Calcolare l'integrale doppio

$$I(a) = \iint_{C_a} f(x,y)\,dxdy$$

dove $0 < a < 1$ e $C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}$.

(b) Calcolare il limite

$$\lim_{a \to 0^+} I(a)$$

e darne un'interpretazione geometrica.

3. Si considerino il campo vettoriale, definito su $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x-y)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (-x-y)\mathbf{k}$$

e le due superfici

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$$

e

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\}$$

entrambe orientate con il versore normale che punta verso l'alto.

(a) Sulla base di considerazioni teoriche (senza fare conti), trovare una relazione tra il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 e il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_2.

(b) Trovare il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 mediante il calcolo di un integrale di superficie.

(c) Trovare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il bordo orientato positivamente di S_1, calcolando esplicitamente un integrale di linea.

(d) Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$?

4. Se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che a ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$ associa il prodotto vettoriale $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

   (a) Posto $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, trovare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} T_{\mathbf{a}}$.

   (b) Posto $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (0, 1, 1)$.

   (c) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $T_{\mathbf{a}}$ rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (d) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $T_{\mathbf{a}}$?

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Secondo appello** **13–09–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Si considerino la funzione $q(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$ e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (a) Spiegare perché D è chiuso e limitato e perché q è continua su D .

   (b) Dire se esiste un punto $(x_0, y_0) \in D$ che soddisfi la seguente condizione:

   $$\forall (x,y) \in D \,, \quad q(x,y) \leq q(x_0,y_0).$$

   (c) Trovare, se esiste, il valore massimo di q su D .

2. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = -\ln\left(x^2 + y^2\right)$$

definita sul piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(a) Calcolare l'integrale doppio

$$I(a) = \iint\limits_{C_a} f(x, y)\, dxdy$$

dove $0 < a < 1$ e $C_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(b) Calcolare il limite

$$\lim_{a \to 0^+} I(a)$$

e darne un'interpretazione geometrica.

3. Si considerino il campo vettoriale, definito su $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2y)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

e le due superfici

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\}$$

entrambe orientate con il versore normale che punta verso l'alto.

(a) Sulla base di considerazioni teoriche (senza fare conti), trovare una relazione tra il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 e il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_2.

(b) Trovare il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 mediante il calcolo di un integrale di superficie.

(c) Trovare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il bordo orientato positivamente di S_1, calcolando esplicitamente un integrale di linea.

(d) Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$?

4. Se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che a ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$ associa il prodotto vettoriale $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

   (a) Posto $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, trovare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} T_{\mathbf{a}}$.

   (b) Posto $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (1, 1, 0)$.

   (c) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $T_{\mathbf{a}}$ rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (d) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $T_{\mathbf{a}}$?

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Secondo appello** **13–09–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = -\ln\sqrt{x^2+y^2}$$
definita sul piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (a) Calcolare l'integrale doppio
$$I(a) = \iint\limits_{C_a} f(x,y)\,dxdy$$
dove $0 < a < 1$ e $C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$.

   (b) Calcolare il limite
$$\lim_{a\to 0^+} I(a)$$
e darne un'interpretazione geometrica.

2. Si considerino la funzione $q(x, y) = x^2 + 8xy + y^2$ e l'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   (a) Spiegare perché D è chiuso e limitato e perché q è continua su D .

   (b) Dire se esiste un punto $(x_0, y_0) \in D$ che soddisfi la seguente condizione:

   $$\forall (x, y) \in D \, , \quad q(x, y) \leq q(x_0, y_0).$$

   (c) Trovare, se esiste, il valore massimo di q su D .

3. Si considerino il campo vettoriale, definito su $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (-x - y)\mathbf{k}$$

e le due superfici

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 4 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\}$$

entrambe orientate con il versore normale che punta verso l'alto.

(a) Sulla base di considerazioni teoriche (senza fare conti), trovare una relazione tra il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 e il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_2.

(b) Trovare il flusso di $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 mediante il calcolo di un integrale di superficie.

(c) Trovare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il bordo orientato positivamente di S_1, calcolando esplicitamente un integrale di linea.

(d) Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$?

4. Se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che a ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$ associa il prodotto vettoriale $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

   (a) Posto $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, trovare una base del sottospazio $\mathrm{Ker}\, T_{\mathbf{a}}$.

   (b) Posto $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (0, 1, 1)$.

   (c) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $T_{\mathbf{a}}$ rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (d) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $T_{\mathbf{a}}$?

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**Secondo appello** **13–09–2012**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta a quadretti non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Consideriamo la funzione
$$f(x,y) = -\ln\left(x^2+y^2\right)$$
definita sul piano bucato $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (a) Calcolare l'integrale doppio
$$I(a) = \iint\limits_{C_a} f(x,y)\,dxdy$$
dove $0 < a < 1$ e $C_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a^2 \le x^2+y^2 \le 1\}$.

   (b) Calcolare il limite
$$\lim_{a\to 0^+} I(a)$$
e darne un'interpretazione geometrica.

2. Si considerino la funzione $q(x,y) = x^2 + 6xy + y^2$ e l'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(a) Spiegare perché D è chiuso e limitato e perché q è continua su D.

(b) Dire se esiste un punto $(x_0, y_0) \in D$ che soddisfi la seguente condizione:

$$\forall (x,y) \in D\,, \quad q(x,y) \leq q(x_0, y_0).$$

(c) Trovare, se esiste, il valore massimo di q su D.

3. Si considerino il campo vettoriale, definito su $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - 2y)\mathbf{i} + (2x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$$

e le due superfici

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0\}$$

e

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 0\}$$

entrambe orientate con il versore normale che punta verso l'alto.

(a) Sulla base di considerazioni teoriche (senza fare conti), trovare una relazione tra il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 e il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_2.

(b) Trovare il flusso di $\operatorname{rot} \mathbf{F}$ attraverso la superficie orientata S_1 mediante il calcolo di un integrale di superficie.

(c) Trovare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo il bordo orientato positivamente di S_1, calcolando esplicitamente un integrale di linea.

(d) Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$?

4. Se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ è un vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$, denotiamo con $T_{\mathbf{a}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare che a ogni vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ in $\mathbb{R}^3$ associa il prodotto vettoriale $T_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$.

   (a) Posto $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, trovare una base del sottospazio $\operatorname{Ker} T_{\mathbf{a}}$.

   (b) Posto $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$, trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = (1, 1, 0)$.

   (c) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore di $\mathbb{R}^3$. Scrivere la matrice rappresentativa dell'applicazione lineare $T_{\mathbf{a}}$ rispetto la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

   (d) Sia $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ un (qualunque) vettore non nullo di $\mathbb{R}^3$. Esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di $T_{\mathbf{a}}$?