Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**13 febbraio 2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

- **Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.**

1. Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla formula

$$T(x, y, z, w) = (x + 2y + 3z + 4w, 2x + 3y + 4z + 5w, 3x + 5y + 7z + 9w).$$

(a) Determinare la dimensione dell'immagine di T, una base per il nucleo di T e una base per l'immagine di T.

(b) Per quali valori di a il vettore $(5, 6, a)$ appartiene all'immagine di T? Per tali valori determinare tutti i vettori $\mathbf{v} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tali che $T(\mathbf{v}) = (5, 6, a)$.

(a) La matrice rappresentativa di T è $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$, la dimensione dell'immagine di T è uguale al rango di A, cioè 2 in quanto la terza riga è somma delle prime due. Il nucleo è l'insieme dei vettori (x, y, z, w) che risolvono il sistema $A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Il sistema ha le ∞^2 soluzioni: $(z + 2w, -2z - 3w, z, w) = z(1, -2, 1, 0) + w(2, -3, 0, 1)$. Pertanto i due vettori: $(1, -2, 1, 0)$ e $(2, -3, 0, 1)$ formano una base del nucleo. L'immagine è generata dalle colonne di A, una base dell'immagine è formata da due colonne linearmente indipendenti di A, ad esempio dai vettori $(1, 2, 3)$ e $(2, 3, 5)$.

(b) Il vettore $(5, 6, a)$ appartiene all'immagine di T se, e solo se, $a = 11$, infatti il sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 5 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 6 \\ 3x + 5y + 7z + 9w = a \end{cases}$ ha soluzione se, e solo se, la matrice completa ha rango 2. I vettori richiesti sono le ∞^2 soluzioni del sistema: $(z + 2w - 3, -2z - 3w + 4, z, w)$, con z e $w \in \mathbb{R}$.

2. Scrivere l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali: $x' = x - 2y,\ y' = 5x + 3y$.

La matrice del sistema, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, ha due autovalori complessi $\lambda = 2 \pm 3i$. Per trovare gli autovettori complessi di A risolviamo il sistema: $\begin{cases} (-1-3i)x - 2y = 0 \\ 5x + (1-3i)y = 0 \end{cases}$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni essendo le due equazioni equivalenti; un autovettore ad esempio è $(2, -1-3i)$. Due vettori soluzione del sistema sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di $e^{(2+3i)t}(2, -1-3i) = e^{2t}(\cos 3t + i \sin 3t)(2, -1-3i) = e^{2t}(2\cos 3t + 2i \sin 3t, -\cos 3t + 3\sin 3t + i(-3\cos 3t - \sin 3t))$. L'integrale generale del sistema è dato da: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{2t}\left(c_1 \begin{bmatrix} 2\cos 3t \\ -\cos 3t + 3\sin 3t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2\sin 3t \\ -3\cos 3t - \sin 3t \end{bmatrix} \right)$

3. Nello spazio cartesiano si calcoli il volume del cilindroide, con generatrici parallele all'asse z, compreso tra il parallelogramma P di vertici $(2,1)$, $(6,-1)$, $(7,0)$ e $(3,2)$ nel piano xy, e la porzione della superficie di equazione $z = e^{x+2y}$ che si proietta su P. (Suggerimento: effettuare un cambiamento di variabili lineare che trasformi P in un rettangolo coi lati paralleli agli assi cartesiani).

Si ha che $P = \{(x,y) : 4 \leq x+2y \leq 7, 1 \leq x-y \leq 7\}$. Il cambiamento di variabili $u = x+2y, v = x-y$ trasforma il dominio di integrazione nel rettangolo $[4,7] \times [1,7]$ del piano u, v.

Il determinante Jacobiano del cambiamento di variabili è

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = -1/3$$

Il volume richiesto è:

$$\iint_P e^{x+2y}\, dxdy = \frac{1}{3} \iint_R e^u dudv = \frac{1}{3} \int_4^7 e^u du \int_1^7 dv = 2(e^7 - e^4)$$

4. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{2\cos 2x}{3y+1}\,\mathbf{i} - \dfrac{3\sin 2x}{(3y+1)^2}\,\mathbf{j}$.

(a) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo in $A = \{(x,y) : 3y+1 > 0\}$ e, in caso affermativo, determinarne un potenziale in A;

(b) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ di equazione parametrica $x = 2^t, y = \ln(1 + t^7(e-1))$, $0 \le t \le 1$.

(a) Il campo è conservativo in A poiché A è semplicemente connesso e $\dfrac{\partial}{\partial y}F_1 = -6\dfrac{\cos 2x}{(3y+1)^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}F_2$. Un potenziale è $U(x,y) = \displaystyle\int_0^x 2\cos 2t\,dt + \int_0^y \frac{-3\sin 2x}{(3t+1)^2}dt = \frac{\sin 2x}{3y+1}$.

(b) Il lavoro è uguale alla differenza di potenziale agli estremi della curva: $U(2,1) - U(1,0) = \frac{1}{4}\sin 4 - \sin 2$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**	**13 febbraio 2014**
Cognome: **Nome:**	**Matricola:**

• Ogni risposta dev'essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e telefoni.

1. Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita dalla formula

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + 5z, 3x + 4y + 7z, 4x + 5y + 9z).$$

(a) Determinare la dimensione dell'immagine di T, una base per il nucleo di T e una base per l'immagine di T.

(b) Per quali valori di a e b il vettore $(4, 7, a, b)$ appartiene all'immagine di T? Per tali valori determinare tutti i vettori $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(\mathbf{v}) = (4, 7, a, b)$.

(a) La matrice rappresentativa di T è $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$. Con operazioni elementari di sulle righe si riduce A alla matrice a scala $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. La dimensione dell'immagine di T è uguale al rango di A, quindi 2 perché U ha due righe non nulle. Il nucleo di A coincide con quello di U ed è l'insieme dei vettori della forma $(-t, -t, t)$. Pertanto il vettore $(-1, -1, 1)$ costituisce una base del nucleo. L'immagine è generata dalle colonne di A, una base dell'immagine è formata da due colonne linearmente indipendenti di A, ad esempio dai vettori $(1, 2, 3, 4)$ e $(2, 3, 4, 5)$.

(b) Il vettore $w = (4, 7, a, b)$ appartiene all'immagine di T se e solo se il rango di $[A|w]$ è uguale a 2. Si osservi che nel calcolare il rango di $[A|w]$ si può cancellare la terza colonna che è combinazione lineare delle prime due. Riducendo a scala $[A|w]$ con la terza colonna rimossa si ottiene la matrice $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 - a \\ 0 & 0 & 13 - b \end{bmatrix}$ che ha rango due se e solo se $a = 10$ e $b = 13$. Ponendo $z = 0$ e risolvendo il sistema $x + 2y = 4$, $y = 1$ otteniamo un vettore $v = (2, 1, 0)$ tale che $T(v) = (4, 7, 10, 13)$. Le altre controimmagini di $(4, 7, 10, 13)$ si ottengono sommando vettori del nucleo, e sono perció i vettori della forma $(2, 1, 0) + (-t, -t, t) = (2 - t, 1 - t, t)$.

2. Scrivere l'integrale generale del sistema di equazioni differenziali: $x' = 3x + 5y,\ y' = -2x + y$.

La matrice del sistema, $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ha due autovalori complessi $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. Per trovare un autovettore complesso di A risolviamo il sistema: $A-(2+3i)I = 0$, che è equivalente alla seconda equazione: $-2x-(1+3i)y = 0$. Un autovettore è quindi $(1 + 3i, -2)$. Due vettori soluzione del sistema sono rispettivamente la parte reale e la parte immaginaria di

$$e^{(2+3i)t}(1+3i, -2) = e^{2t}(\cos(3t)+i\sin(3t))(1+3i, -2) = e^{2t}(\cos(3t)-3\sin(3t), -2\cos(3t))+ie^{2t}(3\cos(3t)+\sin(3t), -2\sin(3t))$$

L'integrale generale del sistema è dato da:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{2t}\left(c_1 \begin{bmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) \\ -2\cos(3t) \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ -2\sin(3t) \end{bmatrix}\right).$$

3. Nello spazio cartesiano si calcoli il volume del cilindroide, con generatrici parallele all'asse z, compreso tra il parallelogramma P di vertici $(1,2)$, $(2,3)$, $(6,1)$ e $(5,0)$ nel piano xy, e la porzione della superficie di equazione $z = e^{x-y}$ che si proietta su P. (Suggerimento: effettuare un cambiamento di variabili lineare che trasformi P in un rettangolo coi lati paralleli agli assi cartesiani).

Si ha che $P = \{(x,y) : -1 \leq x - y \leq 5, 5 \leq x + 2y \leq 8\}$. Il cambio di variabili $u = x - y, v = x + 2y$ trasforma il dominio di integrazione nel rettangolo $R = \{(u,v) : -1 \leq u \leq 5, 5 \leq v \leq 8\}$. Il determinante Jacobiano del cambiamento di variabili è

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = 1/3$$

Il volume richiesto è:

$$\iint_P e^{x-y}\, dxdy = \frac{1}{3}\iint_R e^u dudv = \frac{1}{3}\int_{-1}^{5} e^u du \int_5^8 dv = e^5 - e^{-1}$$

4. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = 2\cos(2x)\,\ln(y+2)\,\mathbf{i} + \dfrac{\sin(2x)}{y+2}\,\mathbf{j}$.

(a) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo in $A = \{(x,y) : y+2>0\}$ e, in caso affermativo, determinarne un potenziale;

(b) calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ di equazioni parametriche $x = \ln(1+t^7(e-1)), y = 2^t,\ 0 \le t \le 1$.

(a) Il campo è conservativo in A poiché A è semplicemente connesso e $\dfrac{\partial}{\partial y}F_1 = \dfrac{2\cos 2x}{y+2} = \dfrac{\partial}{\partial x}F_2$. Un potenziale è

$$U(x,y) = \int_0^x F_1(t,0)\,dt + \int_0^y F_2(x,t)\,dt = \int_0^x 2\cos(2t)\,\ln(2)\,dt + \int_0^y \frac{\sin 2x}{t+2}dt = \sin(2x)\ln(y+2).$$

(b) Il lavoro è uguale alla differenza di potenziale agli estremi della curva: $U(1,2) - U(0,1) = \sin(2)\ln(4)$.