Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**	**5 maggio 2014**

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. ***a***) Al variare del parametro reale k, scrivere la soluzione generale dell'equazione $y'' + 2ky' - 3(2k+3)y = 0$.

b) Determinare un valore del parametro reale k per cui la funzione $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ sia una soluzione particolare dell'equazione differenziale

$$y'' + 2ky' - 3(2k+3)y = (11 - 12x + 4x^2)\,\mathrm{e}^{x^2} \qquad (*)$$

c) In corrispondenza del valore di k trovato al punto precedente, scrivere la soluzione generale dell'equazione $(*)$.

Soluzione

a) L'equazione caratteristica dell'equazione $y'' + 2ky' - 3(2k+3)y = 0$ è $\lambda^2 + 2k\lambda - 3(2k+3) = 0$, le cui radici sono date da $-k \pm |k+3|$ Dunque, le due radici sono $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2k - 3$. Se $k = -3$, le radici sono coincidenti: $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Se $k \neq -3$, le radici $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -2k - 3$ sono distinte. La soluzione generale dell'equazione lineare omogenea $y'' + 2ky' - 3(2k+3)y = 0$ è quindi la seguente:

i) Per $k = -3$,

$$A\,\mathrm{e}^{3x} + Bx\,\mathrm{e}^{3x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

ii) Per $k \neq -3$,

$$A\,\mathrm{e}^{3x} + B\,\mathrm{e}^{(-2k-3)x}, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

b) Se $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, si ha $y'(x) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}$ e $y''(x) = (2 + 4x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$. Sostituendo nelll'equazione $(*)$ si ottiene

$$(4x^2 + 4kx - 6k - 7)\,\mathrm{e}^{x^2} = (11 - 12x + 4x^2)\,\mathrm{e}^{x^2}$$

ossia

$$4x^2 + 4kx - 6k - 7 = 11 - 12x + 4x^2$$

I due polinomi $4x^2 + 4kx - 6k - 7$ e $4x^2 - 12x + 11$ coincidono se e solo se hanno gli stessi coefficienti (Principio di identità dei polinomi). Questo accade se e solo se $k = -3$. L'unico valore di k per il quale $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ è soluzione dell'equazione $(*)$ è pertanto $k = -3$.

c) Per $k = -3$, l'equazione $(*)$ si scrive:

$$y'' - 6y' + 9y = (11 - 12x + 4x^2)\,\mathrm{e}^{x^2} \qquad (**)$$

Sappiamo già che la soluzione generale dell'equazione omogenea $y'' - 6y' + 9y = 0$ è $A\,\mathrm{e}^{3x} + Bx\,\mathrm{e}^{3x}$, con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Inoltre, per il modo stesso in cui abbiamo determinato k, sappiamo che $y(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea $(**)$. La soluzione generale di $(**)$ è dunque

$$A\,\mathrm{e}^{3x} + Bx\,\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{x^2}, \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

2. Trovare la soluzione generale del sistema differenziale lineare $X' = AX$, dove $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Soluzione

Gli autovalori di A , matrice triangolare, sono gli elementi sulla diagonale principale: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 3$. Autovettori corrispondenti a $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = 3$ sono rispettivamente:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$$

La soluzione generale di $X' = AX$ è dunque

$$\begin{aligned} X(t) &= c_1\, \mathrm{e}^{5t}\, \mathbf{v}_1 + c_2\, \mathrm{e}^{3t}\, \mathbf{v}_2 \\ &= c_1\, \mathrm{e}^{5t} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{3t} \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono costanti arbitrarie.

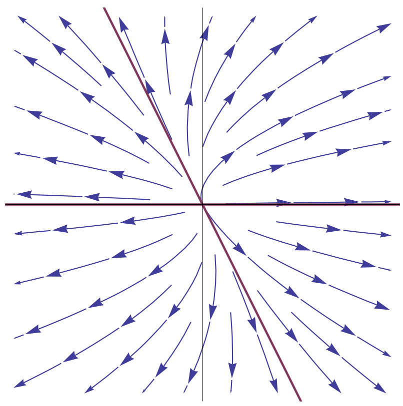

Figura 1: Ritratto di fase del sistema lineare $x' = 5x + y, y' = 3y$. (Sorgente). In rosso sono evidenziate le soluzioni su linea retta $X(t) = \mathrm{e}^{5t}\, \mathbf{v}_1$ e $X(t) = \mathrm{e}^{3t}\, \mathbf{v}_2$, associate agli autovettori $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, -2)$.

3. Stabilire il carattere della serie seguente: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 - 3\sin n}{3^n + 4n}$.

Soluzione

La serie è a termini (definitivamente) positivi. Poiché

$$\frac{n^4 - 3\sin n}{3^n + 4n} \sim \frac{n^4}{3^n}, \qquad \text{per } n \to \infty$$

la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4 - 3\sin n}{3^n + 4n}$ ha lo stesso carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n}$ (Criterio del confronto asintotico). Studiamo allora il carattere di quest'ultima serie. Utilizziamo il criterio del rapporto. Risulta:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^4}{3^{n+1}} \frac{3^n}{n^4} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^4 \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$

Allora, per il criterio del rapporto, la serie assegnata è convergente.

In alternativa al criterio del rapporto, si può osservare che $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{n^6}{3^n} = 0$ implica $\displaystyle\frac{n^4}{3^n} < \frac{1}{n^2}$ per n sufficientemente grande, quindi la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^4}{3^n}$ converge per confronto con la serie convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, è

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Calcolare le dimensioni dell'immagine e del nucleo di F. Stabilire se l'applicazione lineare F è invertibile.

b) Verificare che $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T$ è un autovettore unitario di F e determinare il corrispondente autovalore.

Stabilire se esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T$, costituita da autovettori di F. In caso affermativo, determinarne una e scrivere la matrice M che rappresenta l'applicazione lineare F rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B}$ trovata.

c) Stabilire se esiste una matrice diagonale D che sia simile alla matrice A^5. In caso affermativo, si scriva una di tali matrici diagonali, motivando la risposta.

Soluzione

a) Le dimensioni dell'immagine e del nucleo di F coincidono, rispettivamente, con il rango della matrice A e con la dimensione di $\operatorname{Ker} A$. Con una riduzione a scala (oppure notando che le prime due righe sono linearmente indipendenti e la terza è la somma delle prime due), si trova $\operatorname{rk} A = 2$ e quindi (teorema delle dimensioni) $\dim \operatorname{Ker} A = 1$. Dunque F non è invertibile.

b) Il vettore $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T$ è unitario (cioè, ha lunghezza 1), perché la somma dei quadrati delle sue componenti è $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Verifichiamo che $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T$ è autovettore di F. In modo equivalente, verifichiamo che $(1, -1, 0)^T$ è autovettore di F. Infatti,

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quindi $(1, -1, 0)^T$ è autovettore di F, con autovalore 3; pertanto anche $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T$ è autovettore di F, con autovalore 3.

Poiché la matrice A è simmetrica, esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T$, costituita da autovettori di F (Teorema Spettrale). Per determinare una tale base $\mathcal{B}$, troviamo gli autovalori e gli autospazi della matrice A. Un autovalore, già trovato, è $\lambda_1 = 3$. Un altro autovalore deve essere $\lambda_3 = 0$, perché la matrice A non è invertibile. Resta da determinare il terzo autovalore λ_2. Poiché la somma degli autovalori è la traccia $\operatorname{tr} A = 2 + 2 + 2 = 6$, si deve avere $6 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 3 + \lambda_2 + 0$. Di qui ricaviamo $\lambda_2 = 3$. (Modo alternativo per trovare gli autovalori: trovare le radici del polinomio caratteristico, che è $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 3)^2$). Abbiamo dunque un autovalore doppio $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ e un autovalore semplice $\lambda_3 = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore doppio 3 è il piano $\operatorname{Ker}(A - 3I)$, di equazione cartesiana $x + y - z = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = 0$ è $\operatorname{Ker} A$ $(= \operatorname{Ker}(A - 0I))$, la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Un vettore unitario appartenente a questa retta è $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$.

Si noti che $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)^T$ e $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T$ sono ortogonali tra loro. (Autospazi relativi a autovalori distinti di una matrice simmetrica, sono ortogonali tra loro). Per completare la base $\mathcal{B}$ dobbiamo ora trovare un vettore $\mathbf{v}_2$ che appartenga all'autospazio $\operatorname{Ker}(A - 3I)$ (il piano $x + y - z = 0$) ortogonale a $\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -1, 0)^T$ e unitario. Basta prendere $\mathbf{v}_2$ uguale al prodotto vettoriale $\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1$:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_2 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)^T$$

Un altro modo di trovare $\mathbf{v}_2$ è il seguente: una base dell'autospazio $\operatorname{Ker}(A - 3I)$, cioè del piano di equazione $x + y - z = 0$, è formata dai vettori $\mathbf{w}_1 = \sqrt{2}\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)^T$ e $\mathbf{w}_2 = (1, 0, 1)^T$. La proiezione di $\mathbf{w}_2$ nella direzione ortogonale a $\mathbf{w}_1$ nel piano $x + y + -z = 0$ è il vettore $\mathbf{w} = \mathbf{w}_2 - t\mathbf{w}_1 = (1-t, t, 1)^T$ dove t è determinato dalla richiesta $0 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_1 = 1 - 2t$. Troviamo così $\mathbf{w} = (1/2, 1/2, 1)^T$ e

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||} = \frac{(1,1,2)^T}{||(1,1,2)^T||} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T.$$

Una base ortonormale di autovettori è dunque $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, con

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T, \quad \mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)^T$$

La matrice che rappresenta l'applicazione lineare F rispetto a questa base ortonormale $\mathcal{B}$ è la matrice diagonale $M = \mathrm{diag}(3,3,0)$:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) La matrice A^5 è simmetrica, perché A è simmetrica: $(A^5)^T = (A^T)^5 = A^5$. Quindi, per il teorema spettrale, A^5 è simile a una matrice diagonale. Per ogni intero positivo N, se $\mathbf{v}$ è autovettore di A, con autovalore λ, allora lo stesso $\mathbf{v}$ è anche autovettore di A^N, con autovalore λ^N. Verifichiamolo, ad esempio, per $N = 2$: da $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ segue

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$$

Iterando, avremo $A^N\mathbf{v} = \lambda^N\mathbf{v}$, per ogni intero positivo N. Dunque, gli autospazi di A^N coincidono con gli autospazi di A; pertanto, se λ è un autovalore doppio di A, λ^N sarà autovalore doppio di A^N. Nel nostro caso, poiché gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ (autovalore doppio) e $\lambda_3 = 0$ (autovalore semplice), gli autovalori μ_1, μ_2, μ_3 di A^5 saranno $\mu_1 = \mu_2 = 3^5$ (autovalore doppio) e $\mu_3 = 0$ (autovalore semplice). Quindi A^5 è simile alla matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$