Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**	 **3 luglio 2014**	
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1

Si consideri la funzione f così definita: f è dispari, periodica di periodo $T = 2\pi$, e

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$;

b) scrivere la serie di Fourier associata ad f;

c) stabilire se e in quale senso tale serie converge o meno a $f(x)$, motivando la risposta.

Soluzione

a) Il grafico richiesto è rappresentato nella figura (in fondo).

b) Essendo f dispari vale $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Inoltre, $\forall k \in \mathbb{N}$, vale

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kx)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{k\pi} \left[\cos(kx)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{k\pi}\left[1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Quindi, se k è pari, diciamo $k = 2h$ con $h \in \mathbb{N}$, si avrà

$$b_{2h} = \frac{1}{h\pi}[1 - \cos(h\pi)] = \frac{1}{h\pi}[1 - (-1)^h] = \begin{cases} 0 & h \text{ pari} \\ \frac{2}{h\pi} & h \text{ dispari.} \end{cases}$$

Se invece k è dispari, diciamo $k = 2l - 1$ con $l \in \mathbb{N}$ si avrà

$$b_{2l-1} = \frac{2}{(2l-1)\pi}\left[1 - \cos\left(l\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{2}{(2l-1)\pi}.$$

In conclusione la serie di Fourier richiesta è la seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin[(4n-2)x] + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2}{(2l-1)\pi} \sin[(2l-1)x].$$

c) La serie converge a $f(x)$ per ogni x diverso da $0, \pm\pi/2$ (e diverso dai punti ottenuti da questi aggiungendo $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$) per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, essendo f regolare in tali punti e regolare a tratti sul periodo. Sebbene ciò non sia richiesto si noti che, per il medesimo teorema, $s(0) = 0$, $s(\pm\pi/2) = \pm 1/2$. Inoltre la serie di Fourier converge a f in norma quadratica sull'intero intervallo $[-\pi, \pi]$, essendo continua a tratti, dunque a quadrato integrabile, su tale intervallo.

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Determinare gli eventuali punti stazionari di f, specificandone la natura;

b) stabilire se f è limitata su $\mathbb{R}^2$;

c) determinare il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

Soluzione

a) Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 1$. Dunque l'unico punto stazionario di f è $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Inoltre per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, definita positiva. Dunque $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è punto di minimo.

b) f non è limitata su $\mathbb{R}^2$, infatti restringendosi ad esempio alla retta $y = 0$ si ottiene $f(x, 0) = x^2 - x$, il cui limite per $x \to \pm\infty$ è $+\infty$. Tuttavia f è limitata dal basso: infatti $f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \ge -1/2$ per ogni (x, y).

c) D è chiuso e limitato e f è continua, dunque essa ammette massimo e minimo assoluti in D per il teorema di Weierstrass. Procedendo come nel punto precedente si ottiene che $f(x, y) = c$ se e solo se $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = c + \frac{1}{2}$. Dunque le linee di livello di f al livello c sono non vuote se e solo se $c \ge -\frac{1}{2}$ e sono, per tali valori di c, circonferenze centrate in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e di raggio $\left(c + \frac{1}{2}\right)^{1/2}$. Ciò mostra che il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ trovato in precedenza è di minimo assoluto per f sia su $\mathbb{R}^2$ che su D (infatti $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$), e che il punto di massimo assoluto si trova sull'intersezione della circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ il cui raggio è il massimo per il quale la circonferenza interseca D, con D stesso. Il punto in questione è quindi $(-1, -1)$. Il minimo di f in D vale $-\frac{1}{2}$, il massimo di f in D vale 4.

Alternativamente, si possono studiare le restrizioni di f ai quattro segmenti che costituiscono la frontiera di D. I punti critici di tali restrizioni sono $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. I punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra tali punti, gli spigoli del quadrato considerato e il punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ trovato in precedenza, confrontando i valori di f in tali punti. Si ritrova immediatamente quanto prima mostrato.

Esercizio 3

a) Calcolare il volume del solido S che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x il dominio

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 + x^2\right\}.$$

b) Determinare il flusso del campo $\mathbf{F} = (2x + z)\,\mathbf{i} + (xy^2 + y)\,\mathbf{j} - 2xyz\,\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S.

Soluzione

a) Abbiamo

$$\mathrm{vol}(S) = \int\int\int_V dV$$

dove

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1,\ (y, z) \in \Omega_x\}$$

essendo Ω_x la circonferenza nel piano parallelo al piano (y, z) con centro $(x, 0, 0)$ e raggio $\rho(x) = 1 + x^2$, di area $|\Omega_x| = \pi(1 + x^2)^2$ (nella figura, una rappresentazione del solido).

Integrando per strati troviamo

$$V = \int_0^1 dx \int\int_{\Omega_x} dy\, dz = \int_0^1 |\Omega_x|\, dx = \pi \int_0^1 (1 + x^2)^2\, dx = \frac{28\pi}{15}.$$

b) Il campo assegnato ha divergenza costante pari a 3. Secondo il teorema di Gauss (della divergenza) possiamo calcolare il flusso richiesto come

$$\int\int\int_V \mathrm{div}\,\mathbf{F}\;\mathrm{dV} = 3\int\int\int_{\mathrm{V}} \mathrm{dV} = \frac{28\pi}{5}.$$

Esercizio 4

a) Enunciare il teorema di Stokes.

b) Utilizzare il teorema per calcolare la circuitazione del campo $\mathbf{F} = -z\,\mathbf{i} + 4x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ lungo la curva intersezione tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e il piano $z = y$, specificando l'orientamento scelto.

Soluzione

a) (vedi libro di testo).

b) Usando il teorema di Stokes, calcoliamo la circuitazione come flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso una superficie che abbia la curva Γ assegnata come bordo, evidenziata in rosso in figura; appare, senza dubbio, conveniente utilizzare la porzione S del piano $z = y$ poiché ha normale costante e pari a

$$\mathbf{n}_S = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{k} \qquad \text{(verso l'alto, con norma unitaria).}$$

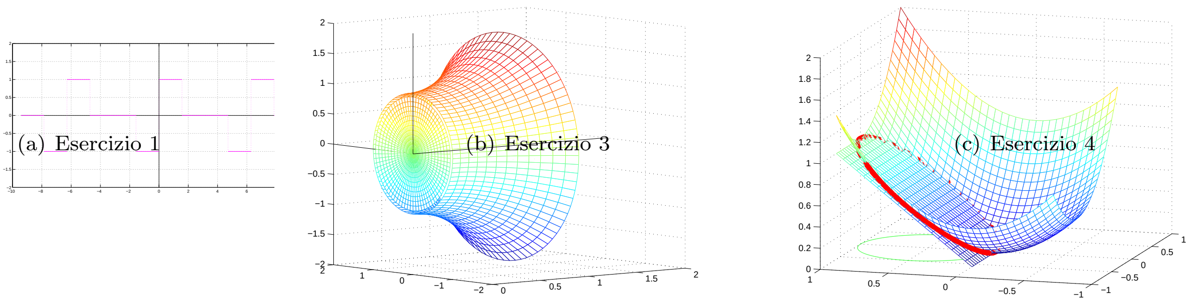
Dunque abbiamo:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -z & 4x & y \end{bmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{S}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{F}\cdot\mathbf{t}\,ds = \int\int_S \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_{\mathrm{S}}\,\mathrm{dS} = \frac{5}{\sqrt{2}}\int\int_{\mathrm{S}} \mathrm{dS} = 5\int\int_{\mathrm{A}} \mathrm{dA} = \frac{5\pi}{4}$$

dove A è il cerchio che si ottiene proiettando S sul piano (x, y), il cui bordo ha equazione $x^2 + y^2 - y = 0$ (si tratta della circonferenza con centro in $(0, 1/2)$ e raggio $1/2$, rappresentata in verde nella figura). Γ è orientata positivamente rispetto a $\mathbf{n}_S$, ovvero è percorsa con verso antiorario guardando la curva dall'alto.



(a) Esercizio 1 (b) Esercizio 3 (c) Esercizio 4

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**	**3 luglio 2014**

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1

Si consideri la funzione f così definita: f è dispari, periodica di periodo $T = 2\pi$, e

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$;

b) scrivere la serie di Fourier associata ad f;

c) stabilire se e in quale senso tale serie converge o meno a $f(x)$, motivando la risposta.

Soluzione

a) Il grafico richiesto è rappresentato nella figura (in fondo).

b) Essendo f dispari vale $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Inoltre, $\forall k \in \mathbb{N}$, vale

$$b_k = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{k\pi}\left[\cos(kx)\right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{k\pi}\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1\right].$$

Quindi, se k è pari, diciamo $k = 2h$ con $h \in \mathbb{N}$, si avrà

$$b_{2h} = \frac{1}{h\pi}[\cos(h\pi) - 1] = \frac{1}{h\pi}[(-1)^h - 1] = \begin{cases} 0 & h \text{ pari} \\ -\frac{2}{h\pi} & h \text{ dispari.} \end{cases}$$

Se invece k è dispari, diciamo $k = 2l - 1$ con $l \in \mathbb{N}$ si avrà

$$b_{2l-1} = \frac{2}{(2l-1)\pi}\left[\cos\left(l\pi - \frac{\pi}{2}\right) - 1\right] = \frac{2}{(1-2l)\pi}.$$

In conclusione la serie di Fourier richiesta è la seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(1-2n)\pi}\sin[(4n-2)x] + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2}{(1-2l)\pi}\sin[(2l-1)x].$$

c) La serie converge a $f(x)$ per ogni x diverso da $0, \pm\pi/2$ (e diverso dai punti ottenuti da questi aggiungendo $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$) per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, essendo f regolare in tali punti e regolare a tratti sul periodo. Sebbene ciò non sia richiesto si noti che, per il medesimo teorema, $s(0) = 0$, $s(\pm\pi/2) = \mp 1/2$. Inoltre la serie di Fourier converge a f in norma quadratica sull'intero intervallo $[-\pi, \pi]$, essendo continua a tratti, dunque a quadrato integrabile, su tale intervallo.

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x - y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Determinare gli eventuali punti stazionari di f, specificandone la natura;

b) stabilire se f è limitata su $\mathbb{R}^2$;

c) determinare il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

Soluzione

a) Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y-1$. Dunque l'unico punto stazionario di f è $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Inoltre per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, definita positiva. Dunque $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ è punto di minimo.

b) f non è limitata su $\mathbb{R}^2$, infatti restringendosi ad esempio alla retta $y = 0$ si ottiene $f(x,0) = x^2 + x$, il cui limite per $x \to \pm\infty$ è $+\infty$. Tuttavia f è limitata dal basso: infatti $f(x,y) = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \ge -1/2$ per ogni (x,y).

c) D è chiuso e limitato e f è continua, dunque essa ammette massimo e minimo assoluti in D per il teorema di Weierstrass. Procedendo come nel punto precedente si ottiene che $f(x,y) = c$ se e solo se $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = c + \frac{1}{2}$. Dunque le linee di livello di f al livello c sono non vuote se e solo se $c \ge -\frac{1}{2}$ e sono, per tali valori di c, circonferenze centrate in $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e di raggio $\left(c+\frac{1}{2}\right)^{1/2}$. Ciò mostra che il punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ trovato in precedenza è di minimo assoluto per f sia su $\mathbb{R}^2$ che su D (infatti $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in D$), e che il punto di massimo assoluto si trova sull'intersezione della circonferenza di centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ il cui raggio è il massimo per il quale la circonferenza interseca D, con D stesso. Il punto in questione è quindi $(1,-1)$. Il minimo di f in D vale $-\frac{1}{2}$, il massimo di f in D vale 4.

Alternativamente, si possono studiare le restrizioni di f ai quattro segmenti che costituiscono la frontiera di D. I punti critici di tali restrizioni sono $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$. I punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra tali punti, gli spigoli del quadrato considerato e il punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ trovato in precedenza, confrontando i valori di f in tali punti. Si ritrova immediatamente quanto prima mostrato.

Esercizio 3

a) Calcolare il volume del solido S che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x il dominio

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 2 + x^2\right\}.$$

b) Determinare il flusso del campo $\mathbf{F} = (2x+y)\,\mathbf{i} + (xy^2 + 3y)\,\mathbf{j} - 2xyz\,\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S.

Soluzione

a) Abbiamo

$$\mathrm{vol}(S) = \int\int\int_V dV$$

dove

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le x \le 1, \ (y,z) \in \Omega_x\}$$

essendo Ω_x la circonferenza nel piano parallelo al piano (y,z) con centro $(x,0,0)$ e raggio $\rho(x) = 2 + x^2$, di area $|\Omega_x| = \pi(2+x^2)^2$ (nella figura, una rappresentazione del solido).

Integrando per strati troviamo

$$V = \int_0^1 dx \int\int_{\Omega_x} dy\, dz = \int_0^1 |\Omega_x|\, dx = \pi \int_0^1 (2+x^2)^2\, dx = \frac{83\pi}{15}.$$

b) Il campo assegnato ha divergenza costante pari a 5. Secondo il teorema di Gauss (della divergenza) possiamo calcolare il flusso richiesto come

$$\int\int\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{dV} = 5 \int\int\int_{\mathrm{V}} \mathrm{dV} = \frac{83\pi}{3}.$$

Esercizio 4

a) Enunciare il teorema di Stokes.

b) Utilizzare il teorema per calcolare la circuitazione del campo $\mathbf{F} = -z\,\mathbf{i} + 3x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ lungo la curva intersezione tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e il piano $z = y$, specificando l'orientamento scelto.

Soluzione

a) (vedi libro di testo).

b) Usando il teorema di Stokes, calcoliamo la circuitazione come flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso una superficie che abbia la curva Γ assegnata come bordo, evidenziata in rosso in figura; appare, senza dubbio, conveniente utilizzare la porzione S del piano $z = y$ poiché ha normale costante e pari a

$$\mathbf{n}_S = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \qquad \text{(verso l'alto, con norma unitaria).}$$

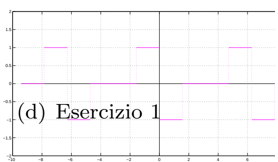
Dunque abbiamo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -z & 3x & y \end{bmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

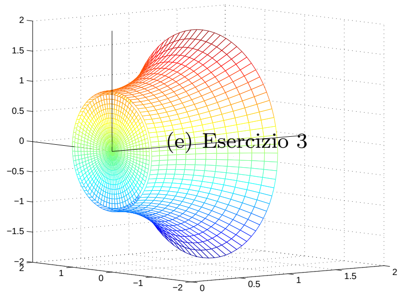
$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{S}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{S}} \, \mathrm{dS} = \frac{4}{\sqrt{2}} \int\int_{\mathrm{S}} \mathrm{dS} = 4 \int\int_{\mathrm{A}} \mathrm{dA} = \pi$$

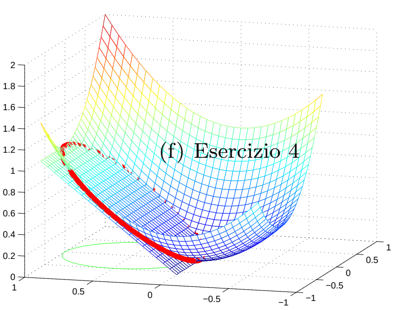
dove A è il cerchio che si ottiene proiettando S sul piano (x, y), il cui bordo ha equazione $x^2 + y^2 - y = 0$ (si tratta della circonferenza con centro in $(0, 1/2)$ e raggio $1/2$, rappresentata in verde nella figura). Γ è orientata positivamente rispetto a $\mathbf{n}_S$, ovvero è percorsa con verso antiorario guardando la curva dall'alto.



(d) Esercizio 1



(e) Esercizio 3



(f) Esercizio 4

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**3 luglio 2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1

Si consideri la funzione f così definita: f è dispari, periodica di periodo $T = 2\pi$, e

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$;

b) scrivere la serie di Fourier associata ad f;

c) stabilire se e in quale senso tale serie converge o meno a $f(x)$, motivando la risposta.

Soluzione

a) Il grafico richiesto è rappresentato nella figura (in fondo).

b) Essendo f dispari vale $a_k = 0 \ \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Inoltre, $\forall k \in \mathbb{N}$, vale

$$b_k = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kx)\, \mathrm{d}x = -\frac{4}{k\pi} \left[\cos(kx)\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{k\pi} \left[1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Quindi, se k è pari, diciamo $k = 2h$ con $h \in \mathbb{N}$, si avrà

$$b_{2h} = \frac{2}{h\pi}[1 - \cos(h\pi)] = \frac{2}{h\pi}[1 - (-1)^h] = \begin{cases} 0 & h \text{ pari} \\ \frac{4}{h\pi} & h \text{ dispari.} \end{cases}$$

Se invece k è dispari, diciamo $k = 2l - 1$ con $l \in \mathbb{N}$ si avrà

$$b_{2l-1} = \frac{4}{(2l-1)\pi} \left[1 - \cos\left(l\pi - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{4}{(2l-1)\pi}.$$

In conclusione la serie di Fourier richiesta è la seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin[(4n-2)x] + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{4}{(2l-1)\pi} \sin[(2l-1)x].$$

c) La serie converge a $f(x)$ per ogni x diverso da $0, \pm\pi/2$ (e diverso dai punti ottenuti da questi aggiungendo $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$) per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, essendo f regolare tranne che nei suddetti punti e regolare a tratti sul periodo. Sebbene ciò non sia richiesto si noti che, per il medesimo teorema, $s(0) = 0$, $s(\pm\pi/2) = \pm 1$. Inoltre la serie di Fourier converge a f in norma quadratica sull'intero intervallo $[-\pi, \pi]$, essendo continua a tratti, dunque a quadrato integrabile, su tale intervallo.

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - x + y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Determinare gli eventuali punti stazionari di f, specificandone la natura;

b) stabilire se f è limitata su $\mathbb{R}^2$;

c) determinare il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \le 1, |y| \le 1\}$.

Soluzione

a) Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 1$. Dunque l'unico punto stazionario di f è $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Inoltre per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha $Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, definita positiva. Dunque $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ è punto di minimo.

b) f non è limitata su $\mathbb{R}^2$, infatti restringendosi ad esempio alla retta $y = 0$ si ottiene $f(x,0) = x^2 + x$, il cui limite per $x \to \pm\infty$ è $+\infty$. Tuttavia f è limitata dal basso: infatti $f(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \ge -1/2$ per ogni (x,y).

c) D è chiuso e limitato e f è continua, dunque essa ammette massimo e minimo assoluti in D per il teorema di Weierstrass. Procedendo come nel punto precedente si ottiene che $f(x,y) = c$ se e solo se $f(x,y) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = c + \frac{1}{2}$. Dunque le linee di livello di f al livello c sono non vuote se e solo se $c \ge -\frac{1}{2}$ e sono, per tali valori di c, circonferenze centrate in $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e di raggio $\left(c + \frac{1}{2}\right)^{1/2}$. Ciò mostra che il punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ trovato in precedenza è di minimo assoluto per f sia su $\mathbb{R}^2$ che su D (infatti $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \in D$), e che il punto di massimo assoluto si trova sull'intersezione della circonferenza di centro $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ il cui raggio è il massimo per il quale la circonferenza interseca D, con D stesso. Il punto in questione è quindi $(-1,1)$. Il minimo di f in D vale $-\frac{1}{2}$, il massimo di f in D vale 4.

Alternativamente, si possono studiare le restrizioni di f ai quattro segmenti che costituiscono la frontiera di D. I punti critici di tali restrizioni sono $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$. I punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra tali punti, gli spigoli del quadrato considerato e il punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ trovato in precedenza, confrontando i valori di f in tali punti. Si ritrova immediatamente quanto prima mostrato.

Esercizio 3

a) Calcolare il volume del solido S che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x il dominio

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 0 \le x \le 1, \; 0 \le y \le 3 + x^2\right\}.$$

b) Determinare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x + 3z)\,\mathbf{i} + (xy^2 + 2y)\,\mathbf{j} + 2(1 - xy)z\,\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S.

Soluzione

a) Abbiamo

$$\mathrm{vol}(S) = \int\int\int_V dV$$

dove

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 0 \le x \le 1, \; (y,z) \in \Omega_x\}$$

essendo Ω_x la circonferenza nel piano parallelo al piano (y,z) con centro $(x,0,0)$ e raggio $\rho(x) = 3 + x^2$, di area $|\Omega_x| = \pi(3 + x^2)^2$ (nella figura, una rappresentazione del solido).

Integrando per strati troviamo

$$V = \int_0^1 dx \int\int_{\Omega_x} dy\,dz = \int_0^1 |\Omega_x|\,dx = \pi \int_0^1 (3 + x^2)^2\,dx = \frac{56\pi}{5}.$$

b) Il campo assegnato ha divergenza costante pari a 5. Secondo il teorema di Gauss (della divergenza) possiamo calcolare il flusso richiesto come

$$\int\int\int_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, \mathrm{dV} = 5 \int\int\int_{\mathrm{V}} \mathrm{dV} = 56\pi.$$

Esercizio 4

a) Enunciare il teorema di Stokes.

b) Utilizzare il teorema per calcolare la circuitazione del campo $\mathbf{F} = -z\,\mathbf{i} + 2x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ lungo la curva intersezione tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e il piano $z = y$, specificando l'orientamento scelto.

Soluzione

a) (vedi libro di testo).

b) Usando il teorema di Stokes, calcoliamo la circuitazione come flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso una superficie che abbia la curva Γ assegnata come bordo, evidenziata in rosso in figura; appare, senza dubbio, conveniente utilizzare la porzione S del piano $z = y$ poiché ha normale costante e pari a

$$\mathbf{n}_S = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \qquad \text{(verso l'alto, con norma unitaria).}$$

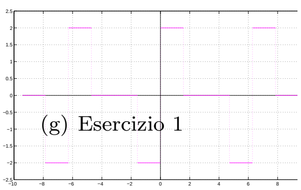
Dunque abbiamo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -z & 2x & y \end{bmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

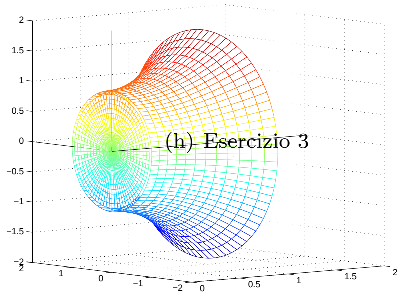
$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{S}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}\, ds = \int\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{S}}\, \mathrm{dS} = \frac{3}{\sqrt{2}} \int\int_{\mathrm{S}} \mathrm{dS} = 3 \int\int_{\mathrm{A}} \mathrm{dA} = \frac{3\pi}{4}$$

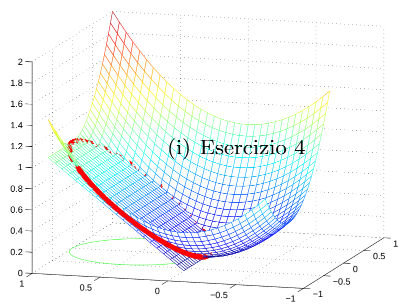
dove A è il cerchio che si ottiene proiettando S sul piano (x, y), il cui bordo ha equazione $x^2 + y^2 - y = 0$ (si tratta della circonferenza con centro in $(0, 1/2)$ e raggio $1/2$, rappresentata in verde nella figura). Γ è orientata positivamente rispetto a $\mathbf{n}_S$, ovvero è percorsa con verso antiorario guardando la curva dall'alto.



(g) Esercizio 1



(h) Esercizio 3



(i) Esercizio 4

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**	**3 luglio 2014**

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

Esercizio 1

Si consideri la funzione f così definita: f è dispari, periodica di periodo $T = 2\pi$, e

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & \text{se } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Disegnare il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$;

b) scrivere la serie di Fourier associata ad f;

c) stabilire se e in quale senso tale serie converge o meno a $f(x)$, motivando la risposta.

Soluzione

a) Il grafico richiesto è rappresentato nella figura (in fondo).

b) Essendo f dispari vale $a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Inoltre, $\forall k \in \mathbb{N}$, vale

$$b_k = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{k\pi}\left[\cos(kx)\right]_0^{\pi/2} = \frac{4}{k\pi}\left[\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) - 1\right].$$

Quindi, se k è pari, diciamo $k = 2h$ con $h \in \mathbb{N}$, si avrà

$$b_{2h} = \frac{2}{h\pi}[\cos(h\pi) - 1] = \frac{2}{h\pi}[(-1)^h - 1] = \begin{cases} 0 & h \text{ pari} \\ -\frac{4}{h\pi} & h \text{ dispari.} \end{cases}$$

Se invece k è dispari, diciamo $k = 2l - 1$ con $l \in \mathbb{N}$ si avrà

$$b_{2l-1} = \frac{4}{(2l-1)\pi}\left[\cos\left(l\pi - \frac{\pi}{2}\right) - 1\right] = \frac{4}{(1-2l)\pi}.$$

In conclusione la serie di Fourier richiesta è la seguente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(1-2n)\pi}\sin[(4n-2)x] + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{4}{(1-2l)\pi}\sin[(2l-1)x].$$

c) La serie converge a $f(x)$ per ogni x diverso da $0, \pm\pi/2$ (e diverso dai punti ottenuti da questi aggiungendo $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$) per il teorema sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier, essendo f regolare tranne che nei suddetti punti e regolare a tratti sul periodo. Sebbene ciò non sia richiesto si noti che, per il medesimo teorema, $s(0) = 0$, $s(\pm\pi/2) = \mp 1$. Inoltre la serie di Fourier converge a f in norma quadratica sull'intero intervallo $[-\pi, \pi]$, essendo continua a tratti, dunque a quadrato integrabile, su tale intervallo.

Esercizio 2

Si consideri la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ così definita:

$$f(x,y)=x^2+y^2+x+y,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

a) Determinare gli eventuali punti stazionari di f, specificandone la natura;

b) stabilire se f è limitata su $\mathbb{R}^2$;

c) determinare il massimo e il minimo assoluto di f nell'insieme $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, |x|\le 1, |y|\le 1\}$.

Soluzione

a) Si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y+1$. Dunque l'unico punto stazionario di f è $\left(-\frac12,-\frac12\right)$. Inoltre per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si ha $Hf=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$, definita positiva. Dunque $\left(-\frac12,-\frac12\right)$ è punto di minimo.

b) f non è limitata su $\mathbb{R}^2$, infatti restringendosi ad esempio alla retta $y=0$ si ottiene $f(x,0)=x^2+x$, il cui limite per $x\to\pm\infty$ è $+\infty$. Tuttavia f è limitata dal basso: infatti $f(x,y)=\left(x+\frac12\right)^2+\left(y+\frac12\right)^2-\frac12\ge -1/2$ per ogni (x,y).

c) D è chiuso e limitato e f è continua, dunque essa ammette massimo e minimo assoluti in D per il teorema di Weierstrass. Procedendo come nel punto precedente si ottiene che $f(x,y)=c$ se e solo se $f(x,y)=\left(x+\frac12\right)^2+\left(y+\frac12\right)^2=c+\frac12$. Dunque le linee di livello di f al livello c sono non vuote se e solo se $c\ge-\frac12$ e sono, per tali valori di c, circonferenze centrate in $\left(-\frac12,-\frac12\right)$ e di raggio $\left(c+\frac12\right)^{1/2}$. Ciò mostra che il punto $\left(-\frac12,-\frac12\right)$ trovato in precedenza è di minimo assoluto per f sia su $\mathbb{R}^2$ che su D (infatti $\left(-\frac12,-\frac12\right)\in D$), e che il punto di massimo assoluto si trova sull'intersezione della circonferenza di centro $\left(-\frac12,-\frac12\right)$ il cui raggio è il massimo per il quale la circonferenza interseca D, con D stesso. Il punto in questione è quindi $(1,1)$. Il minimo di f in D vale $-\frac12$, il massimo di f in D vale 4.

Alternativamente, si possono studiare le restrizioni di f ai quattro segmenti che costituiscono la frontiera di D. I punti critici di tali restrizioni sono $\left(-1,-\frac12\right)$, $\left(1,-\frac12\right)$, $\left(-\frac12,1\right)$, $\left(-\frac12,-1\right)$. I punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra tali punti, gli spigoli del quadrato considerato e il punto $\left(-\frac12,-\frac12\right)$ trovato in precedenza, confrontando i valori di f in tali punti. Si ritrova immediatamente quanto prima mostrato.

Esercizio 3

a) Calcolare il volume del solido S che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse x il dominio

$$T=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 4+x^2\right\}.$$

b) Determinare il flusso del campo $\mathbf{F}=(y-2x)\,\mathbf{i}+(xy^2-y)\,\mathbf{j}-2xyz\,\mathbf{k}$ uscente dalla frontiera di S.

Soluzione

a) Abbiamo

$$\mathrm{vol}(S)=\int\int\int_V dV$$

dove

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\le x\le 1,\ (y,z)\in\Omega_x\}$$

essendo Ω_x la circonferenza nel piano parallelo al piano (y,z) con centro $(x,0,0)$ e raggio $\rho(x)=4+x^2$, di area $|\Omega_x|=\pi(4+x^2)^2$ (nella figura, una rappresentazione del solido).

Integrando per strati troviamo

$$V=\int_0^1 dx\int\int_{\Omega_x} dy\,dz=\int_0^1|\Omega_x|\,dx=\pi\int_0^1(4+x^2)^2\,dx=\frac{283\pi}{15}.$$

b) Il campo assegnato ha divergenza costante pari a -3. Secondo il teorema di Gauss (della divergenza) possiamo calcolare il flusso richiesto come

$$\int\int\int_V \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{dV} = -3 \int\int\int_{\mathrm{V}} \mathrm{dV} = \frac{283\pi}{5}.$$

Esercizio 4

a) Enunciare il teorema di Stokes.

b) Utilizzare il teorema per calcolare la circuitazione del campo $\mathbf{F} = -z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + y\,\mathbf{k}$ lungo la curva intersezione tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e il piano $z = y$, specificando l'orientamento scelto.

Soluzione

a) (vedi libro di testo).

b) Usando il teorema di Stokes, calcoliamo la circuitazione come flusso del rotore di $\mathbf{F}$ attraverso una superficie che abbia la curva Γ assegnata come bordo, evidenziata in rosso in figura; appare, senza dubbio, conveniente utilizzare la porzione S del piano $z = y$ poiché ha normale costante e pari a

$$\mathbf{n}_S = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k} \qquad \text{(verso l'alto, con norma unitaria).}$$

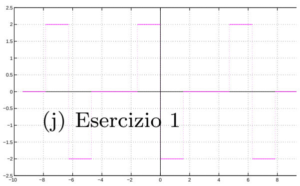
Dunque abbiamo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -z & x & y \end{bmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

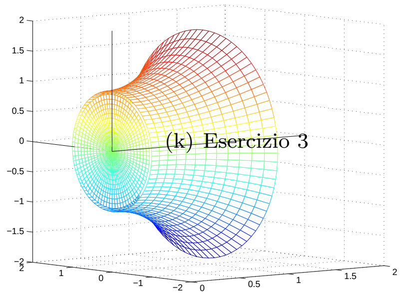
$$\operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{S}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int\int_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_{\mathrm{S}} \, \mathrm{dS} = \frac{2}{\sqrt{2}} \int\int_{\mathrm{S}} \mathrm{dS} = 2 \int\int_{\mathrm{A}} \mathrm{dA} = \frac{\pi}{2}$$

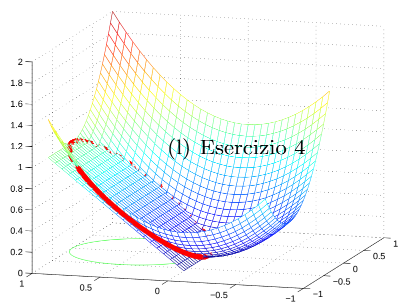
dove A è il cerchio che si ottiene proiettando S sul piano (x, y), il cui bordo ha equazione $x^2 + y^2 - y = 0$ (si tratta della circonferenza con centro in $(0, 1/2)$ e raggio $1/2$, rappresentata in verde nella figura). Γ è orientata positivamente rispetto a $\mathbf{n}_S$, ovvero è percorsa con verso antiorario guardando la curva dall'alto.



(j) Esercizio 1



(k) Esercizio 3



(l) Esercizio 4