Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**17 Luglio 2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che, dette $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_3) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_4) = 3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

(a) Scrivere la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}$ rispetto alle basi suddette.

(b) Determinare la dimensione e una base per $\ker \mathcal{L}$.

(c) Determinare la dimensione e una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

Soluzione: (a) Si ha

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Riducendo a scala $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 8 \\ 2 & 6 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dunque $\dim \ker \mathcal{L} = 2$, il nucleo di $\mathcal{L}$ è formato dai vettori $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ tali che

$$\begin{cases} x_1 = 9x_3 - 5x_4 \\ x_2 = x_4 - 4x_3 \end{cases}$$

e pertanto (ponendo alternativamente $x_3 = 1, x_4 = 0$ e $x_3 = 0, x_4 = 1$) si ottiene una base per $\ker \mathcal{L}$:

$$\mathscr{B}_{\ker \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Poiché nella riduzione a scala i *pivot* di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ sono comparsi nella prima e nella seconda colonna, una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$ (la cui dimensione è 2) è formata dalle corrispondenti colonne[1] di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, dunque

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Im} \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

[1] In un caso di questo genere, poiché $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$, una qualsiasi coppia di colonne, purché non proporzionali, della matrice costituisce una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

2. (a) Enunciare il teorema della divergenza nello spazio.

(b) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

attraverso il bordo della porzione dello spazio $E \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 3 + x^2 + y^2\},$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluzione: (a) Vedi libri di testo.
(b) Calcoliamo il flusso utilizzando il teorema della divergenza. La divergenza del campo è data da

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}y^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}1 = x + x^2 + y^2,$$

quindi il flusso si ottiene come segue:

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial E}(\mathbf{v}) &= \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{v} \ dx \ dy \ dz = \iint_D dx \ dy \int_{z=1-x^2-y^2}^{z=3+x^2+y^2} (x + x^2 + y^2) dz \\ &= 2 \iint_D (x + x^2 + y^2)(1 + x^2 + y^2) \ dx \ dy = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho \cos\theta + \rho^2)(1 + \rho^2)\rho \ d\rho.\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} I_1 &:= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho \cos\theta)(1 + \rho^2)\rho \ d\rho = \frac{16}{15} \\ I_2 &:= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho^2)(1 + \rho^2)\rho \ d\rho = \pi \frac{5}{12} \end{aligned}$$

da cui si ha

$$\Phi_{\partial E}(\mathbf{v}) = I_1 + I_2 = \frac{16}{15} + \pi \frac{5}{12}.$$

3. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^4 e^{-x^2/y^4} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}.$$

(a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

(b) Calcolare tutte le derivate direzionali in $(0,0)$.

(c) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione: (a) Continuità. Osserviamo che per definizione $f(0,0) = 0$ e che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^5 \cos\theta \sin^4\theta \; e^{-\rho^2\cos^2\theta/(\rho^4\sin^4\theta)} = 0,$$

in quanto il termine $\cos\theta\sin^4\theta \; e^{-\rho^2\cos^2\theta/(\rho^4\sin^4\theta)}$ è limitato e ρ^5 è infinitesimo per $\rho \to 0$. Quindi f è continua in $(0,0)$.
(b) Derivate direzionali. $f_x(0,0) = 0$, inoltre per ogni $\mathbf{w} = (u,v)$ con $v \neq 0$ tale che $u^2 + v^2 = 1$, si ha che

$$D_{\mathbf{w}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu,tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(tu)(tv)^4 e^{-(tu)^2/(tv)^4} = 0,$$

dove si è usato il teorema relativo al prodotto di una funzione limitata per una infinitesima.
(c) Differenziabilità. Dato che $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$ si verifica facilmente quanto segue

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

poiché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^4 e^{-h^2/k^4}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} \; \rho^5 \cos\theta\sin^4\theta \; e^{-\rho^2\cos^2\theta/\rho^4\sin^4\theta} = 0;$$

per considerazioni simili al punto (a). Quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

4. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (y + x\sin x)\mathbf{i} + (x + \cos y)\mathbf{j}$.

(a) Dare la definizione di campo conservativo e di campo irrotazionale.

(b) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$.

(c) Nel caso in cui il campo $\mathbf{F}$ sia conservativo, determinarne un potenziale.

Soluzione: (a) Vedi libri di testo.
(b) Poniamo

$$X(x,y) := y + x\sin x, \qquad Y(x,y) := x + \cos y,$$

e osserviamo che X e Y sono $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso. Poiché $X_y = Y_x = 1$ si ha che il campo è conservativo.
(c) Un potenziale è dato da

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x X(t,y)\ dt + \int_0^y Y(0,t)\ dt \\ &= \int_0^x (y + t\sin t)\ dt + \int_0^y \cos t\ dt = [ty - t\cos t + \sin t]_0^x + [\sin t]_0^y \\ &= xy - x\cos x + \sin x + \sin y. \end{aligned}$$

Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**17 Luglio 2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che, dette $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_2) = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 12\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 12\mathbf{k}.$$

(a) Scrivere la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}$ rispetto alle basi suddette.

(b) Determinare la dimensione e una base per $\ker \mathcal{L}$.

(c) Determinare la dimensione e una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

Soluzione: (a) Si ha

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

(b) Riducendo a scala $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 12 & -12 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \overset{R_3 \to R_3 + 3R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dunque $\dim \ker \mathcal{L} = 2$, il nucleo di $\mathcal{L}$ è formato dai vettori $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ tali che

$$\begin{cases} x_1 = 10x_4 - 8x_3 \\ x_2 = 2x_3 - 3x_4 \end{cases}$$

e pertanto (ponendo alternativamente $x_3 = 1, x_4 = 0$ e $x_3 = 0, x_4 = 1$) si ottiene una base per $\ker \mathcal{L}$:

$$\mathscr{B}_{\ker \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Poiché nella riduzione a scala i *pivot* di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ sono comparsi nella prima e nella seconda colonna, una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$ (la cui dimensione è 2) è formata dalle corrispondenti colonne[2] di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, dunque

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Im} \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

[2]In un caso di questo genere, poiché $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$, una qualsiasi coppia di colonne, purché non proporzionali, della matrice costituisce una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

2. (a) Enunciare il teorema della divergenza nello spazio.

(b) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

attraverso il bordo della porzione dello spazio $E \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 4 + x^2 + y^2\},$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluzione: (a) Vedi libri di testo.
(b) Calcoliamo il flusso utilizzando il teorema della divergenza. La divergenza del campo è data da

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}y^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}1 = x + x^2 + y^2,$$

quindi il flusso si ottiene come segue:

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial E}(\mathbf{v}) &= \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{v}\ dx\ dy\ dz = \iint_D dx\ dy \int_{z=1-x^2-y^2}^{z=4+x^2+y^2} (x + x^2 + y^2) dz \\ &= \iint_D (x + x^2 + y^2)(3 + 2(x^2 + y^2))\ dx\ dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta + \rho^2)(3 + 2\rho^2)\rho\ d\rho.\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}I_1 &:= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta)(3 + 2\rho^2)\rho\ d\rho = \frac{7}{5} \\ I_2 &:= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho^2)(3 + 2\rho^2)\rho\ d\rho = \pi\frac{13}{24}\end{aligned}$$

da cui si ha

$$\Phi_{\partial E}(\mathbf{v}) = I_1 + I_2 = \frac{7}{5} + \pi\frac{13}{24}.$$

3. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy^6 e^{-x^2/y^6} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}.$$

(a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

(b) Calcolare tutte le derivate direzionali in $(0,0)$.

(c) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione: (a) Continuità. Osserviamo che per definizione $f(0,0) = 0$ e che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^7 \cos\theta \sin^6\theta \; e^{-\rho^2\cos^2\theta/(\rho^6\sin^6\theta)} = 0,$$

in quanto il termine $\cos\theta \sin^6\theta \; e^{-\rho^2\cos^2\theta/(\rho^6\sin^6\theta)}$ è limitato e ρ^7 è infinitesimo per $\rho \to 0$. Quindi f è continua in $(0,0)$.
(b) Derivate direzionali. $f_x(0,0) = 0$, inoltre per ogni $\mathbf{w} = (u,v)$ con $v \neq 0$ tale che $u^2 + v^2 = 1$, si ha che

$$D_{\mathbf{w}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu,tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(tu)(tv)^6 e^{-(tu)^2/(tv)^6} = 0,$$

dove si è usato il teorema relativo al prodotto di una funzione limitata per una infinitesima.
(c) Differenziabilità. Dato che $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$ si verifica facilmente quanto segue

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

poiché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk^6 e^{-h^2/k^6}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} \; \rho^7 \cos\theta \sin^6\theta \; e^{-\rho^2\cos^2\theta/\rho^6\sin^6\theta} = 0;$$

per considerazioni simili al punto (a). Quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

4. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (y - x\sin x)\mathbf{i} + (x + \cos y)\mathbf{j}$.

(a) Dare la definizione di campo conservativo e di campo irrotazionale.

(b) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$.

(c) Nel caso in cui il campo $\mathbf{F}$ sia conservativo, determinarne un potenziale.

Soluzione: (a) Vedi libri di testo.
(b) Poniamo

$$X(x,y) := y - x\sin x, \qquad Y(x,y) := x + \cos y,$$

e osserviamo che X e Y sono $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso. Poiché $X_y = Y_x = 1$ si ha che il campo è conservativo.
(c) Un potenziale è dato da

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x X(t,y)\ dt + \int_0^y Y(0,t)\ dt \\ &= \int_0^x (y - t\sin t)\ dt + \int_0^y \cos t\ dt = [ty + t\cos t - \sin t]_0^x + [\sin t]_0^y \\ &= xy + x\cos x - \sin x + \sin y. \end{aligned}$$

Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**17 Luglio 2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che, dette $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_2) = -2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_3) = \mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_4) = -3\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

(a) Scrivere la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}$ rispetto alle basi suddette.

(b) Determinare la dimensione e una base per $\ker \mathcal{L}$.

(c) Determinare la dimensione e una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

Soluzione: (a) Si ha

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & -7 & 10 \\ -2 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Riducendo a scala $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -3 & 7 & -7 & 10 \\ -2 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 2R_1]{R_2 \to R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dunque $\dim \ker \mathcal{L} = 2$, il nucleo di $\mathcal{L}$ è formato dai vettori $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ tali che

$$\begin{cases} x_1 = 7x_3 + x_4 \\ x_2 = 4x_3 - x_4 \end{cases}$$

e pertanto (ponendo alternativamente $x_3 = 1, x_4 = 0$ e $x_3 = 0, x_4 = 1$) si ottiene una base per $\ker \mathcal{L}$:

$$\mathscr{B}_{\ker \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Poiché nella riduzione a scala i *pivot* di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ sono comparsi nella prima e nella seconda colonna, una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$ (la cui dimensione è 2) è formata dalle corrispondenti colonne[3] di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, dunque

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Im} \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

[3] In un caso di questo genere, poiché $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$, una qualsiasi coppia di colonne, purché non proporzionali, della matrice costituisce una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

2. (a) Enunciare il teorema della divergenza nello spazio.

(b) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

attraverso il bordo della porzione dello spazio $E \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, 1 - x^2 - y^2 \le z \le 5 + x^2 + y^2\},$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \ge 0, \ y \ge 0, \ x^2 + y^2 \le 1\}$.

Soluzione: (a) Vedi libri di testo.
(b) Calcoliamo il flusso utilizzando il teorema della divergenza. La divergenza del campo è data da

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}y^3\right) + \frac{\partial}{\partial z}1 = x + x^2 + y^2,$$

quindi il flusso si ottiene come segue:

$$\begin{aligned}
\Phi_{\partial E}(\mathbf{v}) &= \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{v}\ dx\ dy\ dz = \iint_D dx\ dy \int_{z=1-x^2-y^2}^{z=5+x^2+y^2} (x + x^2 + y^2)dz \\
&= \iint_D (x + x^2 + y^2)(4 + 2(x^2 + y^2))\ dx\ dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta + \rho^2)(4 + 2\rho^2)\rho\ d\rho.
\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta)(4 + 2\rho^2)\rho\ d\rho = \frac{26}{15} \\
I_2 &:= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho^2)(4 + 2\rho^2)\rho\ d\rho = \pi\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

da cui si ha

$$\Phi_{\partial E}(\mathbf{v}) = I_1 + I_2 = \frac{26}{15} + \pi\frac{2}{3}.$$

3. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y^8 e^{-x^4/y^8} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}.$$

(a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

(b) Calcolare tutte le derivate direzionali in $(0,0)$.

(c) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione: (a) Continuità. Osserviamo che per definizione $f(0,0) = 0$ e che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{10} \cos^2\theta \sin^8\theta \; e^{-\rho^4 \cos^4\theta/(\rho^8 \sin^8\theta)} = 0,$$

in quanto il termine $\cos^2\theta \sin^8\theta \; e^{-\rho^4 \cos^4\theta/(\rho^8 \sin^8\theta)}$ è limitato e ρ^{10} è infinitesimo per $\rho \to 0$. Quindi f è continua in $(0,0)$.
(b) Derivate direzionali. $f_x(0,0) = 0$, inoltre per ogni $\mathbf{w} = (u,v)$ con $v \neq 0$ tale che $u^2 + v^2 = 1$, si ha che

$$D_{\mathbf{w}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu,tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} (tu)^2 (tv)^8 e^{-(tu)^4/(tv)^8} = 0,$$

dove si è usato il teorema relativo al prodotto di una funzione limitata per una infinitesima.
(c) Differenziabilità. Dato che $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$ si verifica facilmente quanto segue

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h f_x(0,0) - k f_y(0,0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0,$$

poiché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2 k^8 e^{-h^4/k^8}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho} \rho^{10} \cos^2\theta \sin^8\theta \; e^{-\rho^4 \cos^4\theta/\rho^8 \sin^8\theta} = 0;$$

per considerazioni simili al punto (a). Quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

4. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (y + x\cos x)\mathbf{i} + (x + \cos y)\mathbf{j}$.

(a) Dare la definizione di campo conservativo e di campo irrotazionale.

(b) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$.

(c) Nel caso in cui il campo $\mathbf{F}$ sia conservativo, determinarne un potenziale.

Soluzione: (a) Vedi libri di testo.
(b) Poniamo

$$X(x,y) := y + x\cos x, \qquad Y(x,y) := x + \cos y,$$

e osserviamo che X e Y sono $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso. Poiché $X_y = Y_x = 1$ si ha che il campo è conservativo.
(c) Un potenziale è dato da

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x X(t,y)\ dt + \int_0^y Y(0,t)\ dt \\ &= \int_0^x (y + t\cos t)\ dt + \int_0^y \cos t\ dt = [ty + t\sin t + \cos t]_0^x + [\sin t]_0^y \\ &= xy + x\sin x + \cos x - 1 + \sin y. \end{aligned}$$

Es.1	Es.2	Es.3	Es.4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**17 Luglio 2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Sia $\mathcal{L} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che, dette $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, si ha

$$\mathcal{L}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_2) = -3\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 12\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_3) = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}, \qquad \mathcal{L}(\mathbf{e}_4) = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 12\mathbf{k}.$$

(a) Scrivere la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}$ rispetto alle basi suddette.

(b) Determinare la dimensione e una base per $\ker \mathcal{L}$.

(c) Determinare la dimensione e una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

Soluzione: (a) Si ha

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 6 & -5 \\ -3 & 12 & 12 & -12 \end{bmatrix}$$

(b) Riducendo a scala $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ -2 & 7 & 6 & -5 \\ -3 & 12 & 12 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 3R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dunque $\dim \ker \mathcal{L} = 2$, il nucleo di $\mathcal{L}$ è formato dai vettori $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ tali che

$$\begin{cases} x_1 = 8x_4 - 4x_3 \\ x_2 = 3x_4 - 2x_3 \end{cases}$$

e pertanto (ponendo alternativamente $x_3 = 1, x_4 = 0$ e $x_3 = 0, x_4 = 1$) si ottiene una base per $\ker \mathcal{L}$:

$$\mathscr{B}_{\ker \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Poiché nella riduzione a scala i *pivot* di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ sono comparsi nella prima e nella seconda colonna, una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$ (la cui dimensione è 2) è formata dalle corrispondenti colonne[4] di $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, dunque

$$\mathscr{B}_{\operatorname{Im} \mathcal{L}} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} \right\}$$

[4] In un caso di questo genere, poiché $\operatorname{rk} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = 2$, una qualsiasi coppia di colonne, purché non proporzionali, della matrice costituisce una base per $\operatorname{Im} \mathcal{L}$.

2. (a) Enunciare il teorema della divergenza nello spazio.

(b) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

attraverso il bordo della porzione dello spazio $E \subset \mathbb{R}^3$ definita da

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D, 1 - x^2 - y^2 \leq z \leq 6 + x^2 + y^2\},$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Soluzione: (a) Vedi libri di testo.
(b) Calcoliamo il flusso utilizzando il teorema della divergenza. La divergenza del campo è data da

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{1}{3}y^3\Big) + \frac{\partial}{\partial z}1 = x + x^2 + y^2,$$

quindi il flusso si ottiene come segue:

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial E}(\mathbf{v}) &= \iiint_E \operatorname{div}\mathbf{v}\ dx\ dy\ dz = \iint_D dx\ dy \int_{z=1-x^2-y^2}^{z=6+x^2+y^2} (x + x^2 + y^2)dz \\ &= \iint_D (x + x^2 + y^2)(5 + 2(x^2 + y^2))\ dx\ dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta + \rho^2)(5 + 2\rho^2)\rho\ d\rho.\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned}I_1 &:= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho\cos\theta)(5 + 2\rho^2)\rho\ d\rho = \frac{31}{15} \\ I_2 &:= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 (\rho^2)(5 + 2\rho^2)\rho\ d\rho = \pi\frac{19}{24}\end{aligned}$$

da cui si ha

$$\Phi_{\partial E}(\mathbf{v}) = I_1 + I_2 = \frac{31}{15} + \pi\frac{19}{24}.$$

3. Data la funzione $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4y^4e^{-x^4/y^6} & y \neq 0 \\ 0 & y = 0 \end{cases}.$$

(a) Stabilire se f è continua in $(0,0)$.

(b) Calcolare tutte le derivate direzionali in $(0,0)$.

(c) Stabilire se f è differenziabile in $(0,0)$.

Soluzione: (a) Continuità. Osserviamo che per definizione $f(0,0) = 0$ e che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^8 \cos^4\theta \sin^4\theta \; e^{-\rho^4\cos^4\theta/(\rho^6\sin^6\theta)} = 0,$$

in quanto il termine $\cos^4\theta\sin^4\theta \; e^{-\rho^4\cos^4\theta/(\rho^6\sin^6\theta)}$ è limitato e ρ^8 è infinitesimo per $\rho \to 0$. Quindi f è continua in $(0,0)$.

(b) Derivate direzionali. $f_x(0,0) = 0$, inoltre per ogni $\mathbf{w} = (u,v)$ con $v \neq 0$ tale che $u^2+v^2 = 1$, si ha che

$$D_{\mathbf{w}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu,tv) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(tu)^4(tv)^4e^{-(tu)^4/(tv)^6} = 0,$$

dove si è usato il teorema relativo al prodotto di una funzione limitata per una infinitesima.

(c) Differenziabilità. Dato che $f_x(0,0) = 0$ e $f_y(0,0) = 0$ si verifica facilmente quanto segue

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,$$

poiché

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^4k^4e^{-h^4/k^6}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho}\; \rho^8\cos^4\theta\sin^4\theta \; e^{-\rho^4\cos^4\theta/\rho^6\sin^6\theta} = 0;$$

per considerazioni simili al punto (a). Quindi f è differenziabile in $(0,0)$.

4. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (y + x \sin x)\mathbf{i} + (x + \sin y)\mathbf{j}$.

(a) Dare la definizione di campo conservativo e di campo irrotazionale.

(b) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$.

(c) Nel caso in cui il campo $\mathbf{F}$ sia conservativo, determinarne un potenziale.

Soluzione: (a) Vedi libri di testo.
(b) Poniamo

$$X(x, y) := y + x \sin x, \qquad Y(x, y) := x + \sin y,$$

e osserviamo che X e Y sono $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e che $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso. Poiché $X_y = Y_x = 1$ si ha che il campo è conservativo.
(c) Un potenziale è dato da

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int_0^x X(t, y)\ dt + \int_0^y Y(0, t)\ dt \\ &= \int_0^x (y + t \sin t)\ dt + \int_0^y \sin t\ dt = [ty - t \cos t + \sin t]_0^x - [\cos t]_0^y \\ &= xy - x \cos x + \sin x - \cos y + 1. \end{aligned}$$