Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**	**11 settembre 2014**
Cognome: **Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

Soluzione:

La matrice è simmetrica dunque esiste una base ortonormale di autovettori di A. Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione $\det(A-\lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 12\lambda + 36) = 0$ e sono: $\lambda = 0$ di molteplicità algebrica 1, e $\lambda = 6$ di molteplicità algebrica 2. Gli autovettori relativi all'autovalore 0 sono i vettori $(2y, y, -y)$; gli autovettori relativi all'autovalore 6 sono i vettori $(x, y, 2x+y)$. Fissato un autovettore dell'autospazio V_6, ad esempio $(0,1,1)$, un autovettore ad esso ortogonale è ad esempio il vettore $(1,-1,1)$. Una base ortonormale di autovettori è: $\{\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\}$.

2. Sia γ l'ellisse intersezione del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con il piano $x + y + 2z = 2$. Trovare il punto di γ che ha distanza massima dall'origine.

Soluzione:

Si tratta di massimizzare la funzione $f_1(x,y) = x^2+y^2+(x^2+y^2)^2$, e quindi più semplicemente $f(x,y) = x^2+y^2$, sul vincolo $x + y + 2(x^2 + y^2) = 2$.

I punti stazionari della Lagrangiana $L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y + 2(x^2 + y^2) - 2)$ sono: $x = y = \dfrac{1}{2}, \lambda = \dfrac{1}{3}; x = y = -1, \lambda = \dfrac{2}{3}$. Il punto di γ a distanza massima da O è $(-1,-1,2)$.

3. Dopo aver verificato che la funzione $y = \log(\cos x)\cos x + x \sin x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ nell'intervallo $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, determinarne la soluzione del problema di Cauchy $y''+y = \dfrac{1}{\cos x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Soluzione:

Si ha che $y' = \dfrac{-\sin x}{\cos x}\cos x - \log(\cos x)\sin x + \sin x + x\cos x$, e $y'' = -\cos x + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} - \log(\cos x)\cos x + 2\cos x - x\sin x$; quindi $y'' + y = \cos x + \dfrac{\sin^2 x}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x}$. L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata ha come soluzioni $\lambda = \pm i$, quindi l'integrale generale è $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \log(\cos x)\cos x + x \sin x$. La soluzione del problema di Cauchy è $y = \cos x + \log(\cos x)\cos x + x\sin x$.

4. Calcolare la circuitazione del campo $\underline{F}(x,y,z) = x\underline{i} + y^2\underline{j} + xz\underline{k}$ lungo la curva γ bordo della porzione S di sfera di centro l'origine e raggio R=2 contenuta nel primo ottante orientata secondo la normale esterna, con γ positivamente orientata.

Soluzione:

Il rotore di $\underline{F}$ è il campo $-z\underline{j}$; il versore normale esterno a S è $\underline{n} = \frac{1}{R}(x,y,z)$. La componente normale del rotore vale $-\frac{1}{R}yz$. Per il teorema di Stokes la circuitazione è pari al flusso del rotore di $\underline{F}$ attraverso S e cioé $-\dfrac{1}{R}\displaystyle\iint_S yz dS = -\dfrac{1}{R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\sin\phi\sin\theta R\cos\phi R^2\sin\phi d\phi d\theta = -\dfrac{8}{3}$.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**11 settembre 2014**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Si determini una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori della matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

Soluzione:

Gli autovalori sono: 0 di molteplicità 1 e 9 di molteplicità 2.

Una base ortonormale di autovettori è: $\{\frac{1}{3}(2,2,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,1,4)\}$.

2. Sia γ l'ellisse intersezione del paraboloide $z = x^2 + y^2$ con il piano $x + y - 2z = 2$. Trovare il punto di γ che ha distanza massima dall'origine.

Soluzione:

I punti stazionari della Lagrangiana $L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x + y - 2(x^2 + y^2) - 2)$ sono: $x = y = \dfrac{1}{2}, \lambda = -1; x = y = -1, \lambda = -\dfrac{2}{5}$. Il punto di γ a distanza massima da O è $(-1, -1, 2)$.

3. Dopo aver verificato che la funzione $y = \log(\sin x)\sin x - x\cos x$ è soluzione dell'equazione differenziale $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ nell'intervallo $(0, \pi)$, determinare la soluzione del problema di Cauchy $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}, y(\dfrac{\pi}{2}) = 1, y'(\dfrac{\pi}{2}) = \pi/2$.

Soluzione:

L'equazione caratteristica dell'equazione omogenea associata ha come soluzioni $\lambda = \pm i$, quindi l'integrale generale è $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \log(\sin x)\sin x - x\cos x$. La soluzione del problema di Cauchy è $y = \sin x + \log(\sin x)\sin x - x\cos x$.

4. Calcolare la circuitazione del campo $\underline{F}(x, y, z) = x^2\underline{i} + yz\underline{j} + z\underline{k}$ lungo la curva γ bordo della porzione S di sfera di centro l'origine e raggio 3 contenuta nel primo ottante e orientata secondo la normale esterna, con γ positivamente orientata.