Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Totale

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**12 febbraio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2ax + y = a \\ 2x + ay = 1 \\ 2x + y = a \end{cases} \qquad (\, a \text{ è un parametro reale})$$

si calcoli, per ogni valore di a, il rango della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ e quello della matrice completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ del sistema, e si stabilisca per quali valori di a il sistema ammette soluzioni. Per tali valori si determinino tutte le soluzioni del sistema.

Soluzione

Affinché esista soluzione del sistema $Ax = b$ deve essere $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$. Ora il rango di $\mathbf{A}$ è 1 se $a = 1$, e 2 se $a \neq 1$; mentre $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ ha rango 1 se $a = 1$, rango 2 se $a = -1$, e rango 3 altrimenti. Quindi il sistema ha infinite soluzioni se $a = 1$, un'unica soluzione se $a = -1$, e nessuna soluzione se $a \neq \pm 1$. Per $a = 1$ il sistema si riduce alla singola equazione $2x + y = 1$, le cui soluzioni sono i vettori $[x, y]^T = [0, 1]^T + h[1, -2]^T$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Per $a = -1$ l'unica soluzione è $[0, -1]$.

2. Si consideri la funzione $f(x,y) = -3x^2 - 6y^2 + x^2y$. Si calcolino il gradiente e la matrice Hessiana di f . Si trovino i punti critici di f e se ne determini la natura (cioè si stabilisca se sono punti di massimo o punti di minimo o punti di sella).

Soluzione

Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = (-6x + 2xy)\overrightarrow{i} + (-12y + x^2)\overrightarrow{j}$$

e la matrice Hessiana:

$$H(f)(x,y) = \begin{bmatrix} -6+2y & 2x \\ 2x & -12. \end{bmatrix}$$

I punti critici di f sono i punti $P = (x,y)$ in cui si annulla il gradiente:

$$-6x + 2xy = -12y + x^2 = 0.$$

Dalla prima equazione $-6x + 2xy = 0$ deduciamo $x = 0$ oppure $y = 3$, e sostituendo nella seconda ricaviamo le coordinate dei tre punti critici: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (6,3)$ e $P_3 = (-6,3)$.

Determiniamo ora la natura dei punti critici utilizzando le corrispondenti matrici Hessiane. in P_1 , abbiamo $f_{xx}(P_1) < 0$ e $\det H(f)(P_1) > 0$, per cui P_1 è un punto di massimo. In P_2 e in P_3 invece il determinante hessiano è negativo, per cui si tratta di punti di sella.

3. Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint\limits_D x \, dx \, dy$$

dove D è $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x - 1\}$.

Soluzione:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D x \, dx \, dy &= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^1 \rho^2 \cos\theta \, d\rho \, d\theta + \int_0^1 \int_{x-1}^0 x \, dy \, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{3} \cos\theta \, d\theta + \int_0^1 x(-x+1) \, dx \\
&= -\frac{1}{3} + \int_0^1 x(-x+1) \, dx = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

4. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{y}{1+xy} + 6x^2 - 6x \right) \mathbf{i} + \left(\frac{x}{1+xy} - 2y + 2 \right) \mathbf{j}$$

Verificare che tale campo è conservativo nel primo quadrante $Q = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ e calcolarne un potenziale.

Soluzione:

Il campo è definito in Q, che è un insieme semplicemente connesso, ed è irrotazionale, infatti $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{1}{(1+xy)^2} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$. Dunque $\mathbf{F}$ è conservativo in Q. Per calcolare un potenziale calcoliamo il lavoro del campo lungo una spezzata parallela agli assi con punto iniziale $(0,0)$ e punto finale il generico punto $P = (x,y) \in Q$. Si ha che: $U(x,y) = \displaystyle\int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt \; = \int_0^x (6t^2 - 6t)dt + \int_0^y \left(\frac{x}{1+tx} - 2t + 2 \right) \; = 2x^3 - 3x^2 + \ln(1+xy) - y^2 + 2y$.

Analisi e Geometria 2 **Docente:**		**12 febbraio 2015**
Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Ogni risposta deve essere giustificata. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e, in caso di necessità, sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.

1. Dato il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + 2y = a \\ x + 2ay = 1 \\ x + 2y = a \end{cases} \qquad (\, a \text{ è un parametro reale})$$

si calcoli, per ogni valore di a, il rango della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ e quello della matrice completa $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ del sistema, e si stabilisca per quali valori di a il sistema ammette soluzioni. Per tali valori si determinino tutte le soluzioni del sistema.

Soluzione

Affinché esista soluzione del sistema $Ax = b$ deve essere $r(\mathbf{A}) = r([\mathbf{A}|\mathbf{b}])$. Ora il rango di $\mathbf{A}$ è 1 se $a = 1$, e 2 se $a \neq 1$; mentre $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ ha rango 1 se $a = 1$, rango 2 se $a = -1$, e rango 3 altrimenti. Quindi il sistema ha infinite soluzioni se $a = 1$, un'unica soluzione se $a = -1$, e nessuna soluzione se $a \neq \pm 1$. Per $a = 1$ il sistema si riduce alla singola equazione $x + 2y = 1$, le cui soluzioni sono i vettori $[x, y]^T = [1, 0]^T + h[-2, 1]^T$ al variare di h in $\mathbb{R}$. Per $a = -1$ l'unica soluzione è $[0, -1/2]$.

2. Si consideri la funzione $f(x, y) = -6x^2 - 3y^2 + xy^2$. Si calcolino il gradiente e la matrice Hessiana di f . Si trovino i punti critici di f e se ne determini la natura (cioè si stabilisca se sono punti di massimo o punti di minimo o punti di sella).

3. Si calcoli l'integrale doppio

$$\iint\limits_D y\,dx\,dy$$

dove D è $\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1, x+y+1 \geq 0\}$.

Soluzione:

$$\iint\limits_D y\,dx\,dy = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta + \int_{-1}^{0} \int_{-y-1}^{0} y\,dx\,dy = \frac{1}{6}$$

4. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F} = \left(\frac{y}{1+xy} - 2x + 5\right)\,\mathbf{i} + \left(\frac{x}{1+xy} + y^3 - y^2\right)\,\mathbf{j}$$

Verificare che tale campo è conservativo nel primo quadrante $Q = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ e calcolarne un potenziale.

Soluzione:

Il campo è definito in Q, che è un insieme semplicemente connesso, ed è irrotazionale, infatti $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{1}{(1+xy)^2} = \dfrac{\partial F_1}{\partial y}$. Dunque $\mathbf{F}$ è conservativo in Q. Per calcolare un potenziale calcoliamo il lavoro del campo lungo una spezzata parallela agli assi con punto iniziale) e punto finale il generico punto $P = (x, y \in Q$. Si ha che: $U(x,y) = \displaystyle\int_0^x F_1(t,0)dt + \int_0^y F_2(x,t)dt = \int_0^x (-2t+5)dt + \int_0^y \left(\frac{x}{1+tx} + t^3 - t^2\right) = -x^2 + 5x + \ln(1+xy) + \tfrac{1}{4}y^4 - \tfrac{1}{3}y^3$.