Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi Matematica I e Geometria — *Primo compito in itinere – 14 Novembre 2017*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Prima Parte

1. Provare (usando la definizione) che
$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty\,.$$
2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sin(x-1)}\,.$$
3. Provare che i grafici delle funzioni definite da $f(x) = x^2$ e $g(x) = \mathrm{e}^x$ si intersecano.
4. Disegnare un grafico qualitativo della funzione definita da $f(x) = x^{1/2} + x^{5/3}$.
5. Determinare se è derivabile in $x_0 = 0$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x^3 & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$
6. Determinare un costante reale $K > 0$ tale che
$$|\ln x - \ln y| \le K|x-y| \qquad \forall x, y \in [1,2]\,.$$
7. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{\sqrt{1+x} - 1}\,.$$
8. Stabilire se la funzione definita da
$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 8x}$$
ammette un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
9. Calcolare l'integrale definito
$$I = \int_{-1}^{1} x\big(\sin x^2 + 2\big)\mathrm{d}x\,.$$
10. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione definita da
$$F(x) = \int_0^x \cos t^2 \,\mathrm{d}t\,,$$
nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

I par.: 5 punti	**Es.1**: 10 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 4 punti	**Es.4**: 4 punti	**Teo.**: 3 punti	**Tot.**

Seconda Parte

1. Studiare la funzione definita da
$$f(x) = 1 - x + \frac{x}{1 + \log^2 x}\,.$$
In particolare, si richiede di disegnare il grafico qualitativo di f e di studiare la convessità e il comportamento per $x \to 0^+$ di f.

2. Calcolare gli integrali
$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9}\,, \qquad I_2 = \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad I_3 = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x \,\mathrm{d}x\,.$$

3. Determinare il polinomio di MacLaurin di quarto grado della funzione definita da
$$g(x) = \cos x \cdot \sin x^2\,.$$
Determinare poi la derivata quarta e la derivata quinta di g calcolate in 0: $g^{(4)}(0)$ e $g^{(5)}(0)$.

4. Determinare il carattere delle successioni
$$a_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{|\cos n|} \qquad \text{e} \qquad b_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Teoria

1. Enunciare e dimostrare il *Teorema di Fermat.*

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

Soluzioni - Seconda Parte

1. La funzione f è definita per $x>0$. I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\log^2 x}{1+\log^2 x}\,x\right) = -\infty\,.$$

Inoltre, poiché si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+\frac{1}{1+\log^2 x}\right) = -1 \\ \lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{x}{1+\log^2 x}\right) = +\infty\,, \end{aligned}$$

la funzione f non possiede asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

Si osservi che la funzione f è superiormente limitata da 1, essendo

$$f(x) = 1-\frac{\log^2 x}{1+\log^2 x}\,x \le 1 \qquad \forall x\in(0,+\infty)\,.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = -1+\left(\frac{1-\log x}{1+\log^2 x}\right)^2 = -\frac{\log x\,(\log x+1)\left(\log^2 x-\log x+2\right)}{\left(1+\log^2 x\right)^2}\,.$$

In particolare, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1\,.$$

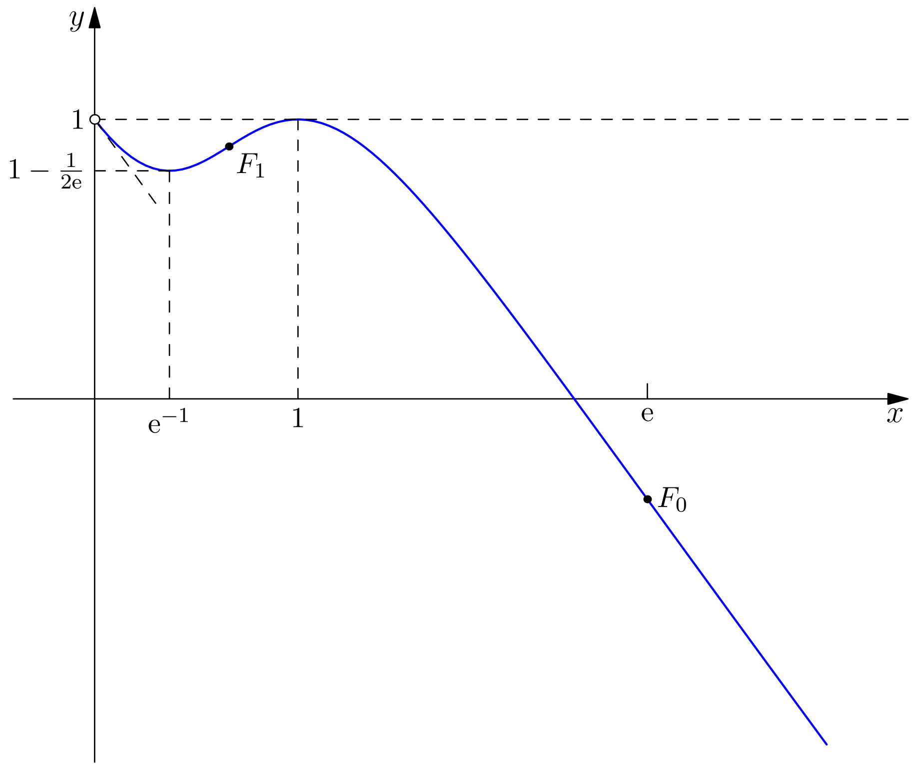
Poiché il polinomio x^2-x+2 ha sempre segno positivo (avendo discriminante negativo e termine noto positivo), si ha $f'(x)\ge 0$ se e solo se $\log x\,(\log x+1)\le 0$, e questo accade se e solo se $e^{-1}\le x\le 1$. Più precisamente, $f'(x)>0$ per $e^{-1}\le x\le 1$, $f'(x)<0$ per $0<x<e^{-1}$ e $x>1$ e $f'(x)=0$ per $x=e^{-1}$ e $x=1$. In particolare, f possiede un punto di minimo relativo in e^{-1}, dato da $(e^{-1}, 1-e^{-1}/2)$, e un punto di massimo assoluto in 1, dato da $(1,1)$.

La derivata seconda è

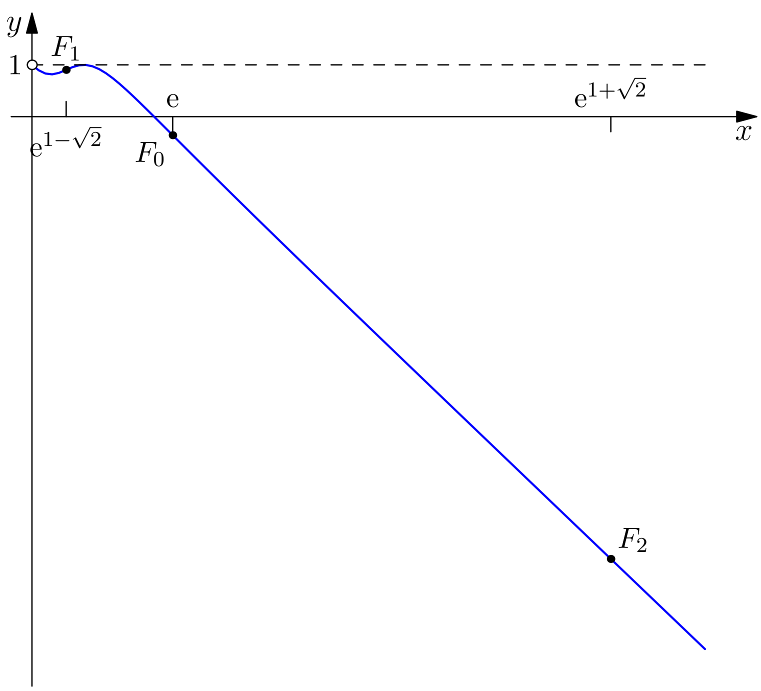
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1-\log x}{1+\log^2 x}\right)^2 \\ &= 2\frac{1-\log x}{1+\log^2 x}\,\frac{-\frac{1}{x}\,(1+\log^2 x)-\frac{2\log x}{x}\,(1-\log x)}{(1+\log^2 x)^2} \\ &= -\frac{2(\log x-1)\left(\log^2 x-2\log x-1\right)}{x\left(1+\log^2 x\right)^3}\,. \end{aligned}$$

Poiché $x>0$, si ha $f''(x)\ge 0$ se e solo se $(\log x-1)\left(\log^2 x-2\log x-1\right)\le 0$, e questo accade se e solo se $0<x\le e^{1-\sqrt{2}}$ e $e\le x\le e^{1+\sqrt{2}}$. Quindi la funzione presenta concavità verso l'alto (ossia è convessa) per $0<x<e^{1-\sqrt{2}}$ ed $e<x<e^{1+\sqrt{2}}$, presenta concavità verso il basso (ossia è concava) per $e^{1-\sqrt{2}}<x<e$ e $x>e^{1+\sqrt{2}}$, e presenta tre flessi in $x_0=e$ e $x_{1,2}=e^{1\pm\sqrt{2}}$.

Il grafico di f è



Mettendo in evidenza anche il terzo flesso, si ha



Osservazione. La funzione f può essere estesa con continutà a una funzione $F : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ponendo $F(x) = f(x)$ per $x > 0$ e $F(0) = 1$. La funzione F è anche derivabile a destra in 0. Infatti, utilizzando la regola di De l'Hôpital, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -1\,.$$

2. Per il primo integrale, si ha

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+9} = \left[\frac{1}{3}\operatorname{artg}\frac{x}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\operatorname{artg}\frac{\pi}{3}\,.$$

Per il secondo integrale, si ha

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \big[\operatorname{arsin} x\big]_0^{1/2} - \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsin} x\right]_0^{1/2} \\ &= \operatorname{arsin}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{arsin}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{arsin}\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\,. \end{aligned}$$

Infine, per il terzo integrale, integrando ripetutamente per parti, si ha

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x = \big[\mathrm{e}^x \sin 2x\big]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x\,\mathrm{d}x = -2\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= -2\big[\mathrm{e}^x \cos 2x\big]_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin 2x\,\mathrm{d}x = -2(\mathrm{e}^{\pi}-1) - 4I_3 \end{aligned}$$

ossia

$$5I_3 = 2\,(1-\mathrm{e}^{\pi})$$

ossia

$$I_3 = \frac{2}{5}\,(1-\mathrm{e}^{\pi})\,.$$

3. Utilizzando le formule di MacLaurin delle funzioni elementari, si ha

$$g(x) = \cos x \cdot \sin x^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)\big(x^2 + o(x^4)\big) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)\,.$$

Pertanto il polinomio di MacLaurin di quarto grado di g è

$$x^2 - \frac{x^4}{2}$$

e quindi $g^{(4)}(0) = -12$. Inoltre $g^{(5)}(0) = 0$, essendo la funzione pari.

4. Poiché $n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n$ e $|\cos n| \leq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_n = \frac{n^2 + (-1)^n n}{|\cos n|} \geq n^2 - n \to +\infty \qquad \text{per } n \to +\infty\,.$$

Quindi, per confronto, anche la successione a_n tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$, ossia a_n è una successione dvergente.

Per la seconda successione, si ha

$$b_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}^{(n+1)\ln(1+\sin\frac{1}{n})}\,.$$

Per $n \to +\infty$, si ha $\frac{1}{n} \to 0$, $\sin\frac{1}{n} \to 0$ e

$$(n+1)\ln(1+\sin\frac{1}{n}) \sim (n+1)\sin\frac{1}{n} \sim \frac{n+1}{n} \to 1\,.$$

Per la continuità della funzione esponenziale, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = e\,.$$

Quindi la successione b_n è convergente.