Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria

Secondo compito in itinere – 18 Gennaio 2018

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Prima Parte

1. Calcolare $z = (\sqrt{3} + \mathrm{i})^{30}$.
2. Determinare l'angolo formato dai vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v} = (1, -1, -\sqrt{6})$.
3. Determinare la posizione reciproca tra la retta
$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$$
e il piano $\pi : x + y + z - 6 = 0$.
4. Trovare tutte le soluzioni (x, y, z) del sistema lineare
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + z = 2 \\ 2x + y + z = 4 . \end{cases}$$
5. Scrivere il vettore $\mathbf{u} = (2, 3)$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v} = (1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, -1)$.
6. Stabilire se è iniettiva l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definita da
$$f(x, y, z) = (x, y, x + y, x + z) .$$
7. Calcolare l'inversa della matrice
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} .$$
8. Determinare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori
$$\mathbf{u} = (1, 1, 1, -1) , \qquad \mathbf{v} = (1, -1, -1, 1) , \qquad \mathbf{w} = (3, 1, 1, -1) .$$
9. Calcolare, se possibile, i prodotti matriciali AB e BA, dove
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} .$$
10. Determinare gli autovalori della matrice
$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} .$$

Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria — *Secondo compito in itinere*

I par.: 5 punti	**Es.1**: 4 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 5 punti	**Es.4**: 8 punti	**Teo.**: 3 punti	**Tot.**

Seconda Parte

1. Disegnare nel piano di Gauss gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ 1 \le |z| \le 2 \,, \ -\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{4} \right\}$$
$$B = \left\{ w \in \mathbb{C} \ : \ w = \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \, z \,, \ z \in A \right\}.$$

2. (a) Determinare il punto P' proiezione ortogonale del punto $P \equiv (1,1,0)$ sulla retta

$$r : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \,. \end{cases}$$

   (b) Determinare il punto P'' simmetrico di P rispetto alla retta r e determinare tutti i punti Q di r tali che il triangolo $PP''Q$ sia equilatero.

3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita, per ogni $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, da

$$f(x,y,z,t) = (x+y+z, y+z+t, x-y-t) \,.$$

   (a) Determinare il nucleo e l'immagine di f.
   (b) Stabilire se f è iniettiva e se è suriettiva.

4. (a) Senza fare conti, dimostrare che la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   è diagonalizzabile.
   (b) Determinare una matrice diagonale D e una matrice invertibile H tali che $A = HDH^{-1}$.
   (c) Dire (giustificando la risposta) se è possibile determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

Teoria

1. Enunciare e dimostrare il teorema delle dimensioni (nullità + rango).

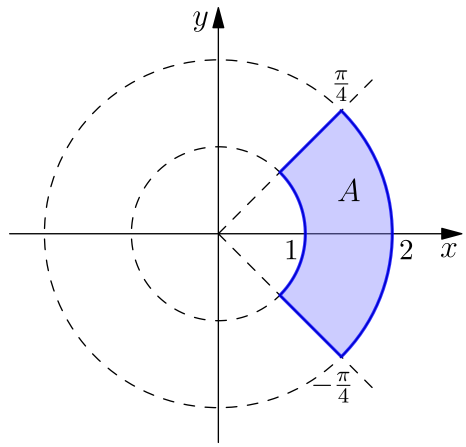
Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

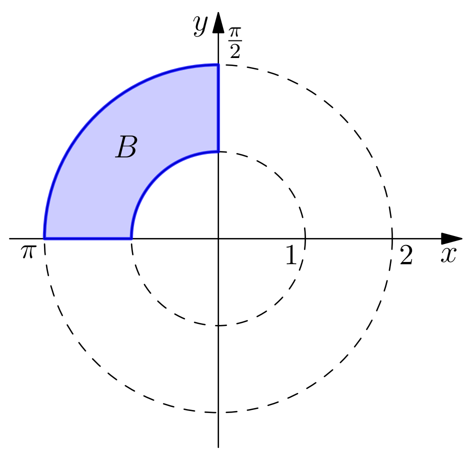
Prima Parte – Risposte

1. $z = -2^{30}$.
2. $\theta = \frac{2}{3}\pi$.
3. La retta r e il piano π sono incidenti nel punto $P \equiv (5/3, 5/3, 8/3)$.
4. La soluzione generale è $\mathbf{x} = (t, 2-t, 2-t)$ con $t \in \mathbb{R}$.
5. $\mathbf{u} = \frac{5}{2}\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$.
6. Iniettiva.
7. Si ha
$$M^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$
8. $\dim\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 2$.
9. Si ha
$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
Il prodotto BA non è definito.
10. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 7$.

1. L'insieme A risulta



Essendo $w = \left(\cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)z$, l'insieme B si ottiene ruotando l'insieme A di un angolo $\theta = \frac{3}{4}\pi$, attorno all'origine, in senso antiorario. Pertanto, si ha



2. (a) PRIMO MODO. Il piano che passa per P ed è ortogonale ad r è $\pi \,:\, 1(x-1)-(y-1)+2(z-0)=0$, ossia $\pi \,:\, x-y+2z=0$. Intersecando r con π, si trova $t=-1$ e quindi $P' \equiv (4,2,-1)$.

   SECONDO MODO. Sia $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$ il versore direttore della retta r e sia $A \equiv (5,1,1)$. Allora, si ha

$$\overrightarrow{AP'} = \langle \overrightarrow{AP}, \mathbf{a}\rangle\, \mathbf{a} = (-1,1,-2)$$

   e quindi $P' = A + \overrightarrow{AP'} = (4,2,-1)$.

   (b) Il punto P' è il punto medio del segmento PP''. Quindi, se $P'' \equiv (x,y,z)$, allora si ha $\frac{1+x}{2} = 4$, $\frac{1+y}{2} = 2$ e $\frac{z}{2} = -1$, ossia $x=7$, $y=3$ e $z=-2$. Equivalentemente, essendo $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'P''}$, si ha $P'' = 2P' - P = (7,3,-2)$.

   I punti richiesti sono i punti $Q \equiv (5+t, 1-t, 1+2t) \in r$ che soddisfano la condizione

$$d(P,Q) = d(P,P")$$

   ossia

$$(5+t-1)^2 + (1-t-1)^2 + (1+2t)^2 = 36+4+4$$

ossia

$$6t^2 + 12t - 27 = 0$$

da cui si ricavano i valori

$$t = -1 \pm \frac{\sqrt{22}}{2}\,.$$

3. (a) Il nucleo di f è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + z + t = 0 \\ x - y - t = 0 \end{cases}$$

da cui si ricava $y = 0$, $z = -x$ e $t = x$. Quindi

$$\mathrm{Ker} f = \{(x, 0, -x, x) \ : \ x \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, -1, 1) \rangle.$$

Poiché $\dim \mathrm{Ker} f = 1$, per il teorema delle dimensioni si ha $\dim \mathrm{Im}\, f = 4 - \dim \mathrm{Ker} f = 3$. Di conseguenza, si ha $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$.

(b) L'applicazione lineare f non è iniettiva ($\mathrm{Ker} f \neq \{\mathbf{0}\}$), ma è suriettiva ($\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}^3$).

4. (a) Essendo simmetrica e reale, la matrice A è diagonalizzabile.

(b) Poiché il polinomio caratteristico di A è

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 & 1 \\ \lambda + 1 & \lambda - 1 & 1 \\ \lambda + 1 & 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2\,, \end{aligned}$$

gli autovalori di A sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -1$.
L'autospazio relativo a $\lambda = -1$ è definito dal sistema

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

da cui si ha $x = y = z$, Pertanto $V_{-1} = \langle (1, 1, 1) \rangle$.
L'autospazio relativo a $\lambda = 2$ è determinato dal sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

da cui si ha $z = x + y$, Pertanto il generico vettore di V_2 è $\mathbf{x} = (x, y, x + y)$, e quindi $V_2 = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$.
In conclusione, le matrici cercate sono

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Per il teorema spettrale, lo spazio $\mathbb{R}^3$ possiede una base ortonormale di autovettori di A.