Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria — *Primo Appello* – 6 Febbraio 2018

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Prima Parte

1. Stabilire se le successioni $a_n = n + \sqrt{4n^2+1}$ e $b_n = 2\sqrt[3]{n^3+n^2}$ sono asintoticamente equivalenti per $n \to +\infty$.

2. Stabilire se è continua in $x = 0$ la funzione definita da
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{se } x < 0 \,. \end{cases}$$

3. Stabilire se l'equazione $(x-1)\,e^x + \ln(1+x^2) = 0$ possiede almeno una soluzione sull'intervallo $[0,1]$.

4. Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \ln(1+x^2) + 2\arctan x$.

5. Calcolare l'integrale $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 3x\, \cos x}{1+x^4}\, \mathrm{d}x\,.$

6. Scrivere l'equazione del piano π passante per il punto $P \equiv (1,2,4)$ e parallelo al piano $\pi' \;:\; 3x+y-z+2=0\,.$

7. Scrivere il vettore $\mathbf{u}=(-3,8)$ come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v}=(1,2)$ e $\mathbf{w}=(3,-1)\,.$

8. Stabilire se i vettori $\mathbf{x}=(1,2,2)\,,$ $\mathbf{y}=(1,2,1)$ e $\mathbf{z}=(2,4,1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3\,.$

9. Determinare il nucleo dell'applicazione lineare $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definita, per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, da
$$f(x,y,z)=(x+y-z,x-y+3z,x+z)\,.$$

10. Stabilire se è ortogonale la matrice $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria — *Primo Appello – 6 Febbraio 2018*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

I par.: 5 punti	**Es.1**: 8 punti	**Es.2**: 5 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 5 punti	**Teo.**: 3 punti	**Tot.**

Seconda Parte

1. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) = \ln(1 + \operatorname{artg}|x-1|)$$
e disegnarne un grafico qualitativo. È richiesto anche lo studio della convessità.

2. Calcolare il limite
$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x^4}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2x^2-3x^4}} - \mathrm{e}^{x^2}\right).$$

3. (a) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, discutere la risolubilità del sistema
$$\begin{cases} x + y + \alpha z + t = \alpha \\ x + t = 0 \\ -y + 2z = \alpha\,. \end{cases}$$
(b) Determinare α in modo che il vettore $\mathbf{u} = (1,0,1,1)$ sia ortogonale alle soluzioni del sistema del punto precedente.

4. Determinare $k \in \mathbb{R}$ in modo che le due matrici
$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$
siano simili.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

TEORIA: Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo.

Teorema

Dimostrazione

Prima Parte – Risposte

1. Si ha $a_n \sim 3n$ e $b_n \sim 2n$ per $n \to +\infty$. Quindi le due successioni non sono asintoticamente equivalenti.

2. Si ha $f(0) = 1$ e

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\,.$$

   La funzione non è continua in $x = 0$ (presenta un punto di discontinuità eliminabile).

3. La funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = (x-1)\,e^x + \ln(1+x^2)$, è continua e $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = \ln 2 > 0$. Per il teorema degli zeri, f possiede almeno uno zero e quindi l'equazione di partenza possiede almeno una soluzione sull'intervallo dato.

4. Poiché
$$f'(x) = \frac{2(x+1)}{1+x^2}\,,$$
   si ha $f'(x) \geq 0$ sse $x \geq -1$. La funzione possiede un minimo in $x = -1$, dato da $f(-1) = \ln 2 - \frac{\pi}{2}$.

5. Poiché la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine, si ha $I = 0$.

6. $\pi \,:\, 3x + y - z - 1 = 0$.

7. $\mathbf{u} = 3\mathbf{v} - 2\mathbf{w}$.

8. Poichè i vettori $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ non sono linearmente indipendenti, non formano una base di $\mathbb{R}^3$.

9. $\mathrm{Ker} f = \langle (1,-2,-1) \rangle$.

10. Poiché le righe (e le colonne) di A formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, la matrice A è ortogonale.

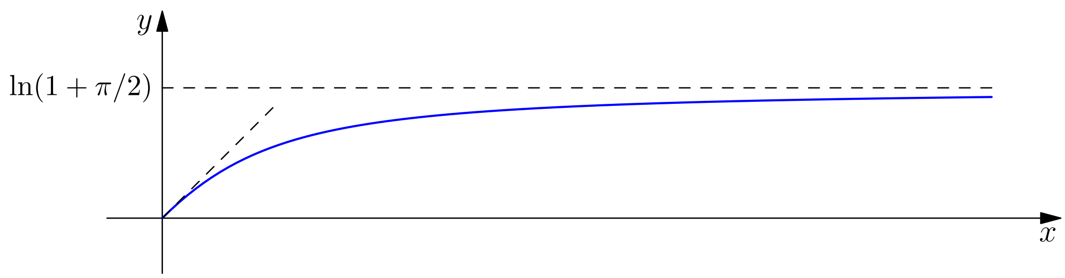
1. Il grafico di f è il traslato del grafico della funzione pari $g(x) = \ln(1 + \operatorname{artg}|x|)$ che studiamo sull'intervallo $[0, +\infty)$. Risulta

$$g(0) = 0\,, \quad g(x) > 0\ \forall x > 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = \ln\Big(1 + \frac{\pi}{2}\Big)\,,$$

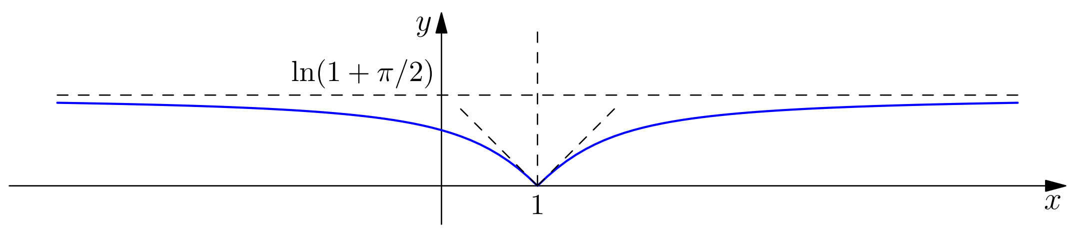
con conseguente asintoto orizzontale. La derivata prima (sempre per $x > 0$) è

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{artg} x}\,\frac{1}{1 + x^2} > 0\ \forall x > 0\,, \qquad g'(0^+) = 1\,.$$

Pertanto, g è strettamente crescente su $[0, +\infty)$. Essendo poi g' il prodotto di due funzioni positive e decrescenti, ne segue che g' è decrescente e quindi g è concava su $[0, +\infty)$. Il grafico di g su $[0, +\infty)$ è



Il grafico di f (ottenuto per simmetria e traslazione) è



In $x = 1$ vi è un punto angoloso con coefficienti angolari delle semitangenti ± 1.

2. Poiché le funzioni x^2 e x^4 sono infinitesime per $x \to 0$, si hanno i seguenti sviluppi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad\qquad \sin x^4 = x^4 + o(x^4)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad\qquad e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

per $x \to 0$. Inoltre, sempre per $x \to 0$, si ha

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}\,x^2 + o(x^2)$$

e

$$(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}\,x^2 + o(x^2)\,.$$

Pertanto, poiché la funzione $2x^2 + 3x^4$ è infinitesima per $x \to 0$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1 - 2x^2 - 3x^4}} &= (1 - 2x^2 - 3x^4)^{-1/2}\\ &= 1 + \frac{1}{2}\,(2x^2 + 3x^4) + \frac{3}{8}\,(2x^2 + 3x^4)^2 + o((2x^2 + 3x^4)^2)\\ &= 1 + x^2 + \frac{3}{2}\,x^4 + \frac{3}{8}\,4x^4 + o(x^4)\\ &= 1 + x^2 + 3x^4 + o(x^4)\,.\end{aligned}$$

Di conseguenza, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x^2-3x^4}} - \mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + 3x^4 + o(x^4) - 1 - x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \frac{5}{2}\, x^4 + o(x^4)$$

e quindi

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5}{2}\, x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{5}{2} + o(1)}{1 + o(1)} = \frac{5}{2}\,.$$

3. Dalle prime due equazioni ricaviamo $y + \alpha z = \alpha$ e $-y + 2z = \alpha$. Sottraendo queste due, si ottiene $(\alpha+2)z = 2\alpha$. Pertanto, se $\alpha = -2$ il sistema non ha soluzioni. Se invece $\alpha \neq -2$, dalle due equazioni qui sopra otteniamo

$$z = \frac{2\alpha}{\alpha+2}\,, \qquad y = \frac{2\alpha - \alpha^2}{\alpha+2}\,.$$

Pertanto, se $\alpha \neq -2$, il sistema ammette le infinite soluzioni

$$\mathbf{x} = (x, y, z, t) = \left(x, \frac{2\alpha-\alpha^2}{\alpha+2}, \frac{2\alpha}{\alpha+2}, -x \right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

La condizione di ortogonalità tra il vettore $\mathbf{u}$ e il vettore $\mathbf{x}$ implica $\alpha = 0$.

4. Gli autovalori di D (matrice diagonale) sono $\lambda = 1$ (doppio) e $\lambda = -1$ (semplice). Il polinomio caratteristico di A è

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - k & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & -k \\ -1 & 0 & \lambda - k \end{vmatrix} = (\lambda-1)((\lambda-k)^2 - 1) = (\lambda-1)(\lambda-k-1)(\lambda-k+1)\,.$$

Pertanto, gli autovalori sono $\lambda = 1$ e $\lambda = k \pm 1$. Questi autovalori coincidono con quelli di D (condizione necessaria per la similitudine) solo nel caso $k = 0$. Pertanto, se $k \neq 0$ le matrici A e D non sono simili. Se invece $k = 0$, bisogna verificare la diagonalizzabilità di A, ossia bisogna verificare che l'autovalore doppio $\lambda = 1$ sia regolare. Poiché

$$r(I - A) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1\,,$$

l'autovalore $\lambda = 1$ è regolare e quindi A è diagonalizzabile. Di conseguenza, per $k = 0$, le matrici sono simili.