Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria *Secondo Appello* – 19 Giugno 2018

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Prima Parte

1. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \int_0^x |t|\,\mathrm{d}t$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

2. Al variare di $\alpha > 0$, calcolare il limite $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1 - x}{x^\alpha}$.

3. Determinare l'inversa della matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

4. Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^4 + 2z^2 + 1 = 0$.

5. Stabilire se è derivabile in $x = 0$ la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$.

6. Scrivere le equazioni parametriche della retta passante per il punto $A \equiv (1, 2, 1)$ e ortogonale al piano d'equazione $x + y - 2z = 1$.

7. Stabilire se i tre vettori $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$ e $\mathbf{w} = (1, 1, -1)$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

8. Determinare il nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, definita da

$$f(x, y) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y, 4x + 4y).$$

9. Stabilire se il grafico della funzione $f(x) = x^{51} + 1$ attraversa la sua retta tangente nel punto $x = 0$.

10. Determinare il polinomio di MacLaurin di quinto grado della funzione $f(x) = \sin x - x$.

Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria — *Secondo Appello – 19 Luglio 2018*

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

I par.: 5 punti	**Es.1**: 8 punti	**Es.2**: 4 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 6 punti	**Teo.**: 3 punti	**Tot.**

Seconda Parte

1. Studiare la funzione f definita da
$$f(x) = x + \frac{1}{\ln x}$$
e disegnarne un grafico qualitativo. In particolare, si richiede lo studio della convessità e di dimostrare che la derivata prima f' si annulla in un unico punto.

2. Calcolare gli integrali
$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad I_2 = \int_0^{\pi^2} x\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x\,.$$

3. Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare
$$\begin{cases} 2x + (4+2\alpha)y + (4+2\alpha)z = -14 \\ (2+\alpha)y + 4z = -8 \\ 2y + (4-\alpha)z = -4\,. \end{cases}$$

4. Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, la dimensione del sottospazio $V = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \subseteq \mathbb{R}^3$, generato dai vettori
$$\mathbf{u} = (k+1, 1, 1-k)\,, \qquad \mathbf{v} = (1,1,1)\,, \qquad \mathbf{w} = (k^2+1, 1, k+1)\,.$$
Per ognuno dei casi trovati, determinare poi una base del sottospazio V.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

TEORIA: Dare la definizione di limite: spiegare cosa si intende con $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ con ℓ finito.

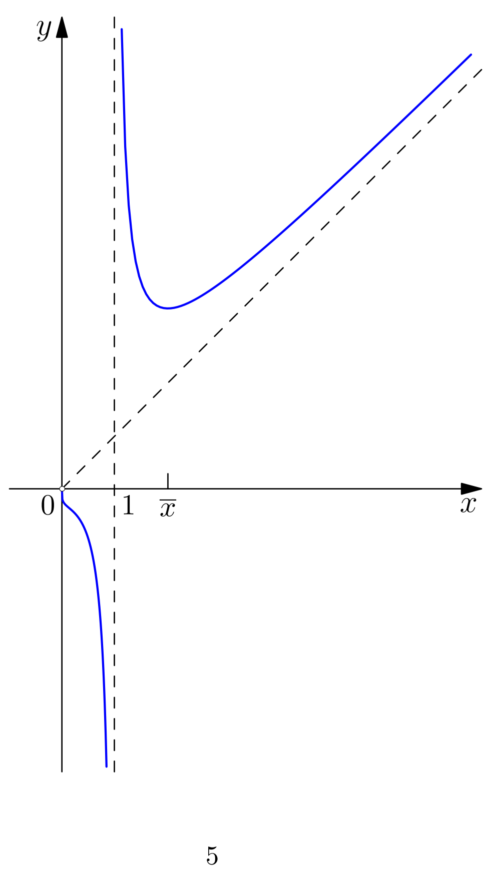
Prima Parte – Risposte

1.

Seconda Parte – Soluzioni

1. Campo di esistenza: $(0,1) \cup (1+\infty)$.
   Limiti:
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\ , \quad \lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \pm\infty\ , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$
   Pertanto, $x = 1$ è asintoto verticale. Poiché $f(x) = x + o(1)$ per $x \to \infty$ la retta $y = x$ è asintoto obliquo. Risulta
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x\log^2 x}\,.$$
   La funzione $x \mapsto x\log^2 x$ è positiva su $(0,\infty)$, ha un massimo assoluto in $x = \mathrm{e}^{-2}$ nell'intervallo $(0,1)$ dove vale $4\mathrm{e}^{-2} < 1$, un minimo assoluto in $x = 1$ e poi cresce monotonamente verso ∞: pertanto, esiste un'unica $\overline{x} \in (1,\infty)$ dove essa vale 1 e, di conseguenza, dove $f'(\overline{x}) = 1$. Il segno della derivata prima è dunque:
$$f'(x) < 0\ \forall x \in (0,1)\cup(1,\overline{x})\ , \qquad f'(x) > 0\ \forall x > \overline{x}\,.$$
   Osserviamo che $f(x) > 0\ \forall x > 1$ (somma di due termini positivi) e quindi f ha un minimo in $\overline{x}$ con $f(\overline{x}) > 0$. Inoltre, $f'(x) \to -\infty$ per $x \to 0^-$ e quindi il grafico ha una semi-tangente verticale nell'origine.

   Derivata seconda:
$$f''(x) = \frac{2+\log x}{x^2\log^3 x}$$
   che si annulla per $x = \mathrm{e}^{-2}$ dove c'è un flesso. La funzione f è convessa in $(0,\mathrm{e}^{-2})\cup(1,\infty)$ e concava in $(\mathrm{e}^{-2},1)$. Il grafico è



2. Il primo integrale è immediato:

$$I_1 = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\Big[\ln^{3/2} x\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{2}{3}\,.$$

Il secondo integrale può essere calcolato usando la sostituzione $x = t^2$ e poi integrando per parti:

$$I_2 = \int_0^{\pi^2} x\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} t^3\cos(t)\,\mathrm{d}t = 2\Big[(t^3-6t)\sin t + (3t^2-6)\cos t\Big]_0^{\pi} = 6(4-\pi^2)\,.$$

3. Studiamo il sistema formato dalle ultime due equazioni (che non contiene la x):

$$\begin{cases} (2+\alpha)y + 4z = -8 \\ 2y + (4-\alpha)z = -4\,. \end{cases}$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione sse il suo determinante è non nullo:

$$(2+\alpha)(4-\alpha) - 8 \neq 0 \qquad \text{ossia} \qquad \alpha(\alpha-2) \neq 0\,.$$

In tal caso, la soluzione è data da

$$(y,z) = \left(-\frac{8}{\alpha}, \frac{4}{\alpha}\right)$$

che, sostituita nella prima equazione, fornisce l'unica soluzione del sistema di partenza

$$(x,y,z) = \left(\frac{8}{\alpha} - 3, -\frac{8}{\alpha}, \frac{4}{\alpha}\right)\,.$$

Se $\alpha = 0$, il sistema in (y,z) diventa

$$\begin{cases} 2y + 4z = -8 \\ 2y + 4z = -4\,, \end{cases}$$

ovviamente impossibile.

Se $\alpha = 2$, il sistema in (y,z) si riduce alla singola equazione $y + z = -2$ che, sostituita nella prima, fornisce le infinite soluzioni $(x,y,z) = (1, y, -2-y)$.

4. Si tratta di determinare il rango della matrice

$$M = \begin{bmatrix} k+1 & 1 & k^2+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1-k & 1 & k+1 \end{bmatrix}.$$

Si ha $\det M = k^2(k+1)$. Pertanto:

- se $k \neq 0$ e $k \neq -1$, M ha rango massimo e $\dim V = 3$; pertanto, una base di V è $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$, oppure $\{\mathrm{e}_1,\mathrm{e}_2,\mathrm{e}_3\}$;
- se $k = 0$, M ha rango 1 (si ha $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{w}$) e $\dim V = 1$; una base è $\{\mathbf{u}\}$;
- se $k = -1$, M ha rango 2 (si ha $\mathbf{w} = 2\mathbf{v} - \mathbf{u}$) e $\dim V = 2$; una base è $\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}$ (oppure $\{\mathbf{u},\mathbf{w}\}$, oppure $\{\mathbf{v},\mathbf{w}\}$,...).