Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria — *Terzo Appello* – 12 Luglio 2018

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Prima Parte
(*Ogni risposta deve essere motivata*)

1. Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\right)\sqrt{4n^2+2n+1}$.

2. Stabilire se la funzione $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua in $x_0 = 0$.

3. Stabilire se la funzione $F(x) = x\,e^{x-1} + \sqrt[3]{x^2-1}$ possiede almeno uno zero nell'intervallo $I = [0,1]$.

4. Calcolare l'integrale $I = \int_0^1 x\,e^x\,dx$.

5. Stabilire se la funzione $F(x) = \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{\sin t})\, \mathrm{d}t$ possiede un punto di massimo in $x_0 = 0$.

6. Disegnare sul piano di Gauss l'insieme $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - 1 - \mathrm{i}| \leq 1\,,\ |z + 1 - \mathrm{i}| \leq 2\}$.

7. Determinare una base del nucleo dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rappresentata, rispetto alle basi canoniche, dalla matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Stabilire se le matrici $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \pi & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} & \pi \\ 2\pi & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ sono simili.

9. Determinare una base ortogonale del sottospazio $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - y + 2z = 0\}$ di $\mathbb{R}^3$.

10. Determinare la distanza tra il punto $P \equiv (1, 2, -1)$ e il piano $\pi \ : \ 2x - y + z + 3 = 0$.

Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria — *Terzo Appello – 12 Luglio 2018*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

I par.: 5 punti	**Es.1**: 8 punti	**Es.2**: 4 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 6 punti	**Teo.**: 3 punti	**Tot.**

Seconda Parte

1. Studiare la funzione definita da
$$f(x) = \cos^2 x - \cos x$$
e disegnarne un grafico qualitativo. (È richiesto anche lo studio della derivata seconda.)

2. (a) Scrivere lo sviluppo di MacLaurin del terzo ordine della funzione f definita da
$$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x} + x\cos x - (1-x)\ln(1+x) - 1\,.$$
(b) Stabilire se la funzione f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
$$f(x,y,z) = (x-y+z, x+y-z, 2x-y)\,.$$
(a) Scrivere la matrice A che rappresenta f rispetto alla base canonica.
(b) Stabilire se lo spazio $\mathbb{R}^3$ possiede una base formata da autovettori di f. In caso affermativo, determinare una tale base.

4. Calcolare, al variare del parametro reale k, il rango della matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & k-1 \\ k & 1 & 2k & k-1 \\ k+1 & k & 3k & k \end{bmatrix}.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

Teoria (3 punti): Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Teorema

Dimostrazione

1. La funzione f é una funzione pari definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è periodica di periodo 2π. Possiamo pertanto restringerci all'intervallo $[-\pi, \pi]$ (in realtà, per la simmetria, potremmo restringerci all'intervallo $[0, \pi]$).

   La funzione f si annulla quando $\cos x = 0$ oppure quando $\cos x = 1$, ossia per $x = 0$ e per $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Inoltre, $f(x) \geq 0$ se e solo se $\cos x(\cos x - 1) \geq 0$, ossia se e solo se $-\pi \leq x \leq -\pi/2$ oppure $\pi/2 \leq x \leq \pi$.

   La derivata prima e la derivata seconda sono

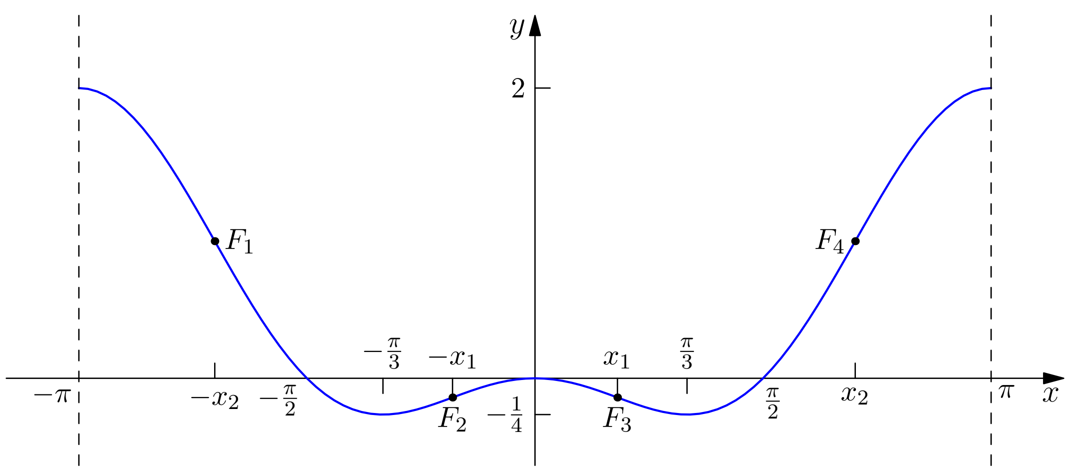
$$f'(x) = -2\cos x \sin x + \sin x = \sin x(1 - 2\cos x)$$
$$f''(x) = 2\sin^2 x - 2\cos^2 x + \cos x = 2 + \cos x - 4\cos^2 x\,.$$

   Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\sin x = 0$ oppure $\cos x = \frac{1}{2}$, ossia se e solo se $x = 0$, $x = \pm\pi$ o $x = \pm\frac{\pi}{3}$. Pertanto, si ha

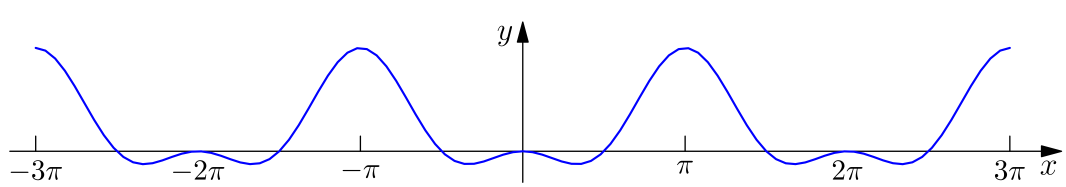
$$f''(0) = -1 < 0 \qquad (0,0) \quad \text{punto di minimo}$$
$$f''(\pm\pi) = -3 < 0 \qquad (\pm\pi, 2) \quad \text{punti di massimo}$$
$$f''\Big(\pm\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{3}{2} > 0 \qquad \Big(\pm\frac{\pi}{3}, -\frac{1}{4}\Big) \quad \text{punti di minimo}\,.$$

   Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $4\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$, ossia se e solo se $\cos x = \frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$, da cui si hanno le soluzioni $\pm\alpha = \pm\arccos\frac{1+\sqrt{33}}{8} \simeq \pm 0.567829$ e $\pm\beta = \pm\arccos\frac{1-\sqrt{33}}{8} \simeq \pm 2.20566$. Pertanto, si ha $f''(x) \geq 0$ se e solo se $4\cos^2 x - \cos x - 2 \leq 0$, ossia se e solo se $\frac{1-\sqrt{33}}{8} \leq \cos x \leq \frac{1+\sqrt{33}}{8}$. Questo accade se e solo se $-\beta \leq x \leq -\alpha$ e $\alpha \leq x \leq \beta$. Quindi, la funzione f presenta concavità rivolta verso l'alto per $-\beta < x < -\alpha$ e $\alpha < x < \beta$ e presenta concavità rivolta verso il basso per $-\pi < x < -\beta$, $-\alpha < x < \alpha$ e $\beta < x < \pi$. Infine, f ha un flesso nei punti $F_1 \equiv (-\beta, f(-\beta))$, $F_2 \equiv (-\alpha, f(-\alpha))$, $F_3 \equiv (\alpha, f(\alpha))$ e $F_4 \equiv (\beta, f(\beta))$. In particolare, $f(\alpha) = \frac{13-3\sqrt{33}}{32} \simeq -0.132303$ e $f(\beta) = \frac{13+3\sqrt{33}}{32} \simeq 0.944803$.

   Il grafico della funzione, ristretto all'intervallo $[-\pi, \pi]$, è



   Il grafico della funzione, ristretto all'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$, è



2. (a) Per $x \to 0$, si hanno gli sviluppi

$$
\begin{aligned}
&e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
&\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
&\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3).
\end{aligned}
$$

Pertanto, per $x \to 0$, si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)\mathrm{e}^{-x} + x\cos x - (1-x)\ln(1+x) - 1 \\
&= (1+x)\Big(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\Big) + x\Big(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big) + \\
&\quad - (1-x)\Big(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) - 1 \\
&= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) + x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \\
&\quad - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3) - 1 \\
&= x^2 - x^3 + o(x^3)\,.
\end{aligned}
$$

(b) Dallo sviluppo trovato, si ha $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2 > 0$. Di conseguenza, la funzione f possiede un punto di minimo in $x_0 = 0$.

3. (a) La matrice che rappresenta f rispetto alla base canonica è

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

(b) Lo spazio $\mathbb{R}^3$ possiede una base formata da autovettori di f se e solo se la matrice A è diagonalizzabile. Poiché

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ \lambda-1 & \lambda-1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1),
\end{aligned}
$$

gli autovalori di A sono 1, 2, -1. Pertanto, possedendo tre autovalori reali e distinti, la matrice A è diagonalizzabile. Passiamo ora a determinare gli autospazi di A.
Per $\lambda = 1$, l'autospazio è determinato dal sistema

$$
\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}
$$

che ha soluzione $x = y = z$. Quindi $V_1 = \langle(1,1,1)\rangle$.
Per $\lambda = 2$, l'autospazio è determinato dal sistema

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x - y - z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ -2x + y + 2z = 0 \end{cases}
$$

che ha soluzione $y = 0$, $z = x$. Quindi $V_2 = \langle(1, 0, 1)\rangle$.
Per $\lambda = -1$, l'autospazio è determinato dal sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} -2x + y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -2x + y - z = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione $y = -3x$, $z = -5x$. Quindi $V_2 = \langle(1, -3, -5)\rangle$.
In conclusione, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f è data da

$$\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, -3, -5)\}.$$

4. Per $k = 1$, si ha la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2, avendo solo due righe linearmente indipendenti.

Per $k \neq 1$, possiamo scegliere il minore (di nord-ovest)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 1 - k \neq 0\,.$$

Orlandolo in tutti i modo possibili, abbiamo i due minore di ordine 3:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ k & 1 & 2k \\ k+1 & k & 3k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ k+1 & k & k-2 \end{vmatrix} = (1-k)(k-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k & 1 & k-1 \\ k+1 & k & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k-1 \\ k-1 & 0 & 0 \\ k+1 & k & k \end{vmatrix} = k(1-k)(2-k).$$

Questi minori si annullano contemporaneamente solo per $k = 2$. Quindi, $r(A) = 3$ per $k \neq 2$ e $r(A) = 2$ per $k = 2$

In conclusione, si ha

$$r(A) = \begin{cases} 3 & \text{per } k \neq 1, 2 \\ 2 & \text{per } k = 1, 2. \end{cases}$$