Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria — *Quarto Appello* – 29 Agosto 2018

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Prima Parte
(*Ogni risposta deve essere motivata*)

1. Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)$.

2. Dato l'insieme $E=\left\{\frac{n-1}{n+1}\cos(n\pi)\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$, determinare $\sup E$ e $\inf E$.

3. Determinare se è monotona in $\mathbb{R}$ la funzione $f(x)=\ln(1+x^2)-x$.

4. Calcolare l'integrale definito $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x$.

5. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $F(x)=\int_0^x \sin t^2\ \mathrm{d}t$, nel punto di ascissa $x=0$.

6. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, per i quali le soluzioni dell'equazione $\alpha z^2 - 2z + 1 = 0$ in $\mathbb{C}$ ha radici complesse coniugate.

7. Determinare la posizione reciproca delle due rette

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{ed} \qquad r_2 : \begin{cases} x = s \\ y = 3 - 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}\,.$$

8. Calcolare l'angolo tra i vettori $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$ e $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$.

9. Stabilire se è iniettiva, suriettiva, biunivoca l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definita da $f(x, y, z) = (x + y + z, x + y, z)$.

10. Stabilire se sono simili le seguenti due matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Politecnico di Milano
Ingegneria Chimica, dei Materiali e delle Nanotecnologie

Analisi Matematica 1 e Geometria — *Quarto Appello – 29 Agosto 2018*

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

I par.: 5 punti	**Es.1**: 8 punti	**Es.2**: 4 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 6 punti	**Teo.**: 3 punti	**Tot.**

Seconda Parte

1. Studiare la seguente funzione definita da
$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2-|x|}{x+1}}$$
e disegnarne un grafico qualitativo.

2. Al variare del parametro reale $\alpha > 0$, calcolare il limite
$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})} - \mathrm{e}^{x/2}}{x^\alpha}.$$

3. Determinare il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da
$$f(x,y,z,w) = (y+z+w, 2x+y-2z, 2x+2y-z+w).$$
Determinare poi un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ ortogonale all'immagine di f.

4. Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, stabilire se la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore e 30 minuti.*

TEORIA:

1. (1 punto) Dare la definizione di funzione derivabile in un punto.
2. (2 punti) Enunciare e dimostrare il teorema del valor medio di Lagrange.

Definizione

Teorema

DIMOSTRAZIONE

Prima Parte – Risposte

1. Poiché $1/n \to 0$ per $n \to +\infty$, si ha
$$\lim_{n\to+\infty} n^3\Big(\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}\Big) = \lim_{n\to+\infty} n^3\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{1}{6} + o(1)\Big) = \frac{1}{6}\,.$$

2. Sin $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos(n\pi)$. Allora, si ha
$$|x_n| = \left|\frac{n-1}{n+1}\cos(n\pi)\right| = \left|\frac{n-1}{n+1}\right| |\cos(n\pi)| \le 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}\,.$$
Inoltre, si ha
$$x_0 = -1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} x_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{2n+1}\cos(2n\pi) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = 1\,.$$
Quindi, si ha $\sup E = 1$ e $\inf E = -1$.

3. La funzione data è definita e derivabile su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, si ha
$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{-1+2x-x^2}{1+x^2} = -\frac{(1-x)^2}{1+x^2} \le 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$
Di conseguenza, f è decrescente su tutto $\mathbb{R}$ e quindi è monotona su $\mathbb{R}$.

4. Si ha
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,\arcsin x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

5. Si ha $F(0) = 0$, $F'(x) = \sin x^2$ e $F'(x) = 0$. Quindi l'equazione della retta tangente richiesta è $y = 0$.

6. Il discriminate dell'equazione data è $\Delta = 4 - 4\alpha = 4(1-\alpha)$. Pertanto, per avere radici complesse coniugate deve essere $\Delta < 1$, ossia $\alpha > 1$.

7. Intersecando le due rette, si ha il sistema
$$\begin{cases} 1+t = s \\ 1+t = 3-2s \\ t = -1+s \end{cases}$$
dal quale si ricava $t = 0$ ed $s = 1$. Pertanto, le due rette date si intersecano nel punto $P \equiv (1,1,0)$.

8. Sia $\theta \in [0,\pi]$ l'angolo tra i due vettori dati. Allora, si ha
$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \theta = \frac{2}{3}\,\pi\,.$$

9. Poiché $\mathrm{Ker} f \neq \varnothing$, l'applicazione lineare data (che è un endomorfismo) non è iniettiva, né suriettiva, né biunivoca.

10. Le due matrici date hanno gli stessi autovalori 1, 2, 3, reali e distinti. La matrice A è diagonale e la matrice B è diagonalizzabile. Di conseguenza, sono simili.

1. La funzione è definita per $x \neq -1$, ossia il dominio della funzione è $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$. Eliminando il modulo, si ha

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2-|x|}{x+1}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{x^2-x}{x+1}} & \text{se } x \geq 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{se } x < 0, x \neq -1. \end{cases}$$

Limiti agli estremi del dominio:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to-1} f(x) = \mathrm{e}^{-1}.$$

Per $x \to -\infty$, f presenta un asintoto orizzontale di equazione $y = 0$. Non esiste asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Si ha $f(x) > 0$ nel suo dominio di definizione. Quindi f non ammette né punti di minimo assoluto né punti di massimo assoluto.

Per lo studio della derivata prima, distinguiamo i casi $x > 0$ e $x < 0$. In $(0,+\infty)$ la funzione è derivabile e si ha

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x+1) - x^2 + x}{(x+1)^2}\, \mathrm{e}^{\frac{x^2-x}{x+1}} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\, \mathrm{e}^{\frac{x^2-x}{x+1}}.$$

Pertanto $f'(x) > 0$ sse $x^2+2x-1 > 0$ sse $x > -1+\sqrt{2}$. Quindi f decresce in $(0,-1+\sqrt{2})$ e cresce in $(-1+\sqrt{2},+\infty)$. Il punto $-1+\sqrt{2}$ è di minimo relativo e $f(-1+\sqrt{2}) = \mathrm{e}^{2\sqrt{2}-3}$.

Per $x < 0$, la funzione è derivabile in $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$ e $f'(x) = \mathrm{e}^x$. Quindi $f'(x) > 0$ in $(-\infty,-1) \cup (-1,0)$ ove f risulta crescente.

Poiché

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -1 \neq \lim_{x\to0^-} f'(x) = 1,$$

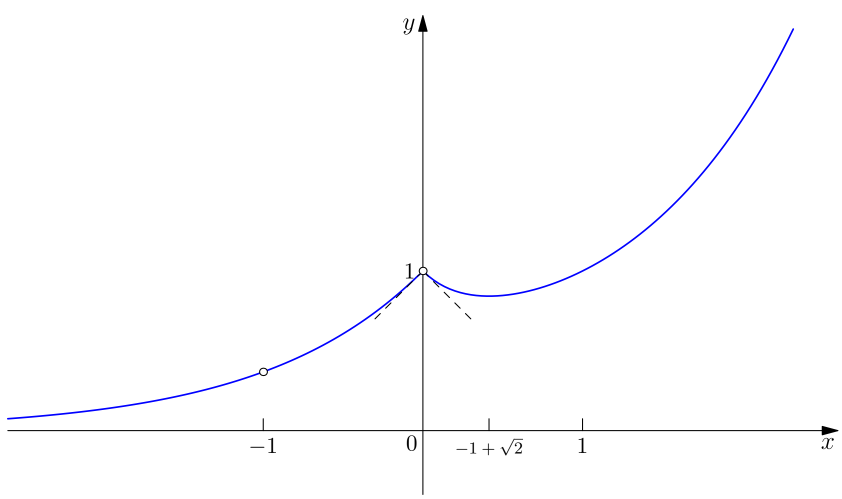
la funzione non è derivabile nel punto angoloso $x = 0$ (dove presenta un punto di massimo relativo).

La derivata seconda per $x > 0$ risulta

$$f''(x) = \frac{(x^2+2x-1)^2}{(x+1)^4}\, \mathrm{e}^{\frac{x^2-x}{x+1}} + \frac{4}{(x+1)^3}\, \mathrm{e}^{\frac{x^2-x}{x+1}}.$$

Per $x < 0$, $f''(x) = \mathrm{e}^x$. Pertanto $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (0,+\infty)$, e quindi f è convessa.

L'andamento qualitativo della funzione è descritto dal seguente grafico



2. Cambiamo variabile $t = \sqrt{x}$ e studiamo il limite

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t-\ln(1+t)} - e^{t^2/2}}{t^{2\alpha}}.$$

Ricordiamo i seguenti sviluppi per $t \to 0$:

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3), \qquad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + o(t^3).$$

Pertanto, per $t \to 0^+$, si ha

$$t - \log(1+t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

e

$$\frac{e^{t-\ln(1+t)} - e^{t^2/2}}{t^{2\alpha}} = \frac{e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + o(t^3)} - e^{t^2/2}}{t^{2\alpha}} = \frac{e^{t^2/2}(e^{-\frac{t^3}{3}+o(t^3)} - 1)}{t^{2\alpha}} =$$
$$= \frac{e^{t^2/2}(1 - \frac{t^3}{3} + o(t^3) - 1)}{t^{2\alpha}} = \frac{e^{t^2/2}(-\frac{t^3}{3} + o(t^3))}{t^{2\alpha}} \sim -\frac{1}{3}t^{3-2\alpha}.$$

Quindi, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})} - e^{x/2}}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^{t-\ln(1+t)} - e^{t^2/2}}{t^{2\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} & \text{se } \alpha = \frac{3}{2} \\ -\infty & \text{se } \alpha > \frac{3}{2}. \end{cases}$$

3. Il nucleo di f è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} y + z + w = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \\ 2x + 2y - z + w = 0 \end{cases}.$$

La terza equazione è somma della prima e della seconda equazione. Si ha pertanto $y = -2x + 2z$ e $w = -y - z = 2x - 3z$. Pertanto, il generico vettore del nucleo è $\mathbf{x} = (x, -2x + 2z, z, 2x - 3z)$, con $x, z \in \mathbb{R}$. Di conseguenza, si ha

$$\mathrm{Ker} f = \langle (1, -2, 0, 2), (0, 2, 1, -3) \rangle.$$

poiché la dimensione del nucleo è, si ha che la dimensione dell'immagine (per il teorema delle dimensioni) è 2. La matrice rappresentativa di f, rispetto le basi canoniche, è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Di conseguenza, scegiendo due colonne indipendenti, si ha

$$\mathrm{Im}\, f = \langle (0, 1, 1), (1, 0, 1) \rangle.$$

Infine, dato il vettore $\mathbf{v} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, si ha

$$\mathbf{v} \perp \mathrm{Im}\, f \iff \begin{cases} \langle \mathbf{v}, (0,1,1) \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{v}, (1,0,1) \rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \iff \mathbf{v} = (-t, -t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Possiamo quindi prendere, ad esempio, il vettore $\mathbf{v} = (1, 1, -1)$.

4. L'equazione caratteristica di A è

$$\det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - k) = 0\,.$$

Pertanto, gli autovalori sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 1 \pm \sqrt{1+k}$.

Se $k < -1$ la matrice A non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$ (poiché ha autovalori complessi).

Se $k \geq -1$, si hano i seguenti casi.

- Se $k \neq 0, -1$ gli autovalori sono semplici, quindi A è diagonalizzabile.
- Se $k = -1$, gli autovalori sono $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. La matrice $I - A$ ha rango 2, quindi l'autovalore 1 non è regolare e A non è diagonalizzabile.
- Se $k = 0$, gli autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2$. La matrice A ha rango 2, quindi l'autovalore 0 non è regolare e A non è diagonalizzabile.