Analisi Matematica II
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Autovalutazione #1

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^2y^2 - 2x + 2y + \mathrm{e}^{x-y}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Scrivere il gradiente di f.

(b) Calcolare la derivata direzionale di f nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ lungo la direzione data dal versore $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

(c) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f in corrispondenza del punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.

(d) Determinare i punti di massimo e di minimo di f.

(e) Mostrare che il punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ è un punto critico vincolato di f relativamente al vincolo

$$\gamma \ : \ x^3 + y^3 - 2x^2 + y^2 + 3x + y = 0\,.$$

2. Calcolare l'integrale

$$I = \iiint_\Omega \frac{x^2z^3\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

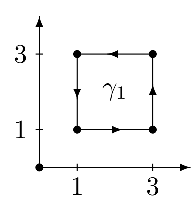
dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\,,\ 0 \leq z \leq 4\}$.

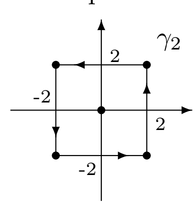
3. Sia $\mathbf{F} : \Omega \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale $\mathbf{F} = \left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}\right)$.

(a) Determinare il campo di esistenza Ω di $\mathbf{F}$.

(b) Stabilire se $\mathbf{F}$ è irrotazionale su Ω.

(c) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo le seguenti curve orientate positivamente





4. (a) Riconoscere la superficie S di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \varphi \in [0,\pi] \\ \theta \in [0,2\pi]\,. \end{array}$$

(b) Sia Σ la porzione della superficie S contenuta nel primo ottante, munita della denisità di massa $\delta(\varphi,\theta) = \cos\varphi\cos\theta$. Calcolare la massa totale di Σ e il suo baricentro.

5. Sia S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 4$, orientata verso l'esterno. Sia Σ la porzione di S compresa tra i piani di equazione $z = 1$ e $z = \sqrt{3}$, orientata come S. Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (z,x,y)$ lungo il bordo γ di Σ, orientato coerentemente con Σ.

Soluzioni

1. (a) Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = (\partial_x f, \partial_y f) = (2xy^2 - 2 + \mathrm{e}^{x-y}, 2x^2y + 2 - \mathrm{e}^{x-y}).$$

(b) Poiché la funzione f è differenziabile nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$, si può utilizzare la formula del gradiente, ossia

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle.$$

Poiché $\nabla f(1,1) = (1,3)$ e $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.$$

(c) L'equazione del piano tangente al grafico di f in corrispondenza di un punto $\mathbf{x}_0$ è

$$z = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle.$$

Nel nostro caso, si ha $f(1,1) = 2$ e $\nabla f(1,1) = (1,3)$. Quindi, si ha l'equazione

$$z = 2 + (x-1) + 3(y-1)$$

ossia

$$x + 3y - z - 2 = 0.$$

(d) Iniziamo col determinare i punti critici di f, ossia i punti che annullano il gradiente di f. Si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2xy^2 - 2 + \mathrm{e}^{x-y} = 0 \\ 2x^2y + 2 - \mathrm{e}^{x-y} = 0. \end{cases}$$

Sommando le due equazioni tra di loro si ha $2xy(x+y) = 0$. Si hanno così tre casi: $x = 0$, oppure $y = 0$, oppure $y = -x$. Se $x = 0$, allora il sistema si riduce all'equazione $-2 + \mathrm{e}^{-y} = 0$, da cui si ottiene $y = -\ln 2$. Analogamente, se $y = 0$, allora il sistema si riduce all'equazione $2 - \mathrm{e}^{x} = 0$, da cui si ottiene $x = \ln 2$. Infine, se $y = -x$, allora il sistema si riduce all'equazione $2x^3 - 2 + \mathrm{e}^{2x} = 0$, ossia $\mathrm{e}^{2x} = 2 - 2x^3$. Studiando le due funzioni e^{2x} e $2 - 2x^3$, si trova che esse hanno un solo punto in comune, per $x = \alpha$, con $0 \leq \alpha \leq 1$. Si hanno così i seguenti tre punti critici

$$P_1 \equiv (0, -\ln 2), \qquad P_2 \equiv (\ln 2, 0) \qquad \text{e} \qquad P_3 \equiv (\alpha, -\alpha).$$

La matrice Hessiana di f è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 2y^2 + \mathrm{e}^{x-y} & 4xy - \mathrm{e}^{x-y} \\ 4xy - \mathrm{e}^{x-y} & 2x^2 + \mathrm{e}^{x-y} \end{bmatrix}.$$

Per $P_1 \equiv (0, -\ln 2)$, si ha

$$H(0, -\ln 2) = \begin{bmatrix} 2\ln^2 2 + 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det H(0, -\ln 2) = 4\ln^2 2 > 0$ e $H(0, -\ln 2)_{1,1} = 2\ln^2 2 + 2 > 0$, P_1 è un punto di minimo.

Analogamente, per $P_2 \equiv (\ln 2, 0)$, si ha

$$H(\ln 2, 0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2\ln^2 2 + 2 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det H(\ln 2, 0) = 4\ln^2 2 > 0$ e $H(\ln 2, 0)_{1,1} = 2 > 0$, P_2 è un punto di minimo. Infine, per $P_3 \equiv (\alpha, -\alpha)$, si ha

$$H(P_3) = \begin{bmatrix} 2\alpha^2 + \mathrm{e}^{2\alpha} & -4\alpha - \mathrm{e}^{2\alpha} \\ -4\alpha - \mathrm{e}^{2\alpha} & 2\alpha^2 + \mathrm{e}^{2\alpha} \end{bmatrix}.$$

Poiché

$$\det H(P_3) = (2\alpha^2 + \mathrm{e}^{2\alpha})^2 - (4\alpha + \mathrm{e}^{2\alpha})^2 = -4\alpha^2(3\alpha^2 + \mathrm{e}^{2\alpha}) < 0,$$

si ha che P_3 è un punto di sella.

(e) Sia $g(x, y) = x^3 + y^3 - 2x^2 + y^2 + 3x + y$. Allora, si ha

$$\nabla g(x, y) = (3x^2 - 4x + 3, 3y^2 + 2y + 1),$$

e quindi $\nabla g(1, 1) = (2, 6) \neq (0, 0)$. Il punto $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ è regolare per la curva γ. Pertanto, $\mathbf{x}_0 = (1, 1)$ è un punto critico vincolato di f relativamente a γ quando esiste uno scalare λ per il quale $\nabla f(1, 1) = \lambda \nabla g(1, 1)$, ossia $(1, 3) = \lambda \nabla g(2, 6)$, e questo accade per $\lambda = \frac{1}{2}$.

2. In coordinate cilindriche, l'insieme Ω è la regione interna al tronco di cilindro determinato dalle condizioni $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $0 \le t \le 4$. Allora, si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^4 \frac{\rho^2 \cos^2\theta \, t^3 \rho}{1 + \rho^2} \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{\rho^4}{1 + \rho^2} \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta \int_0^4 t^3 \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1 - (1 - \rho^4)}{1 + \rho^2} \, \mathrm{d}\rho \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta\right]_0^{2\pi} \left[\frac{t^4}{4}\right]_0^4 \\
&= 4^3\pi \int_0^1 \left(\frac{1}{1 + \rho^2} - 1 + \rho^2\right) \mathrm{d}\rho \\
&= 4^3\pi \left[\operatorname{artg}\rho - \rho + \frac{\rho^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 4^3\pi \left(\operatorname{artg} 1 - 1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= 4^3\pi \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{16}{3} \pi (3\pi - 8).
\end{aligned}$$

3. (a) Il campo di esistenza di $\mathbf{F}$ è $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Poiché

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{x^2 + y^2 - 2x(x + y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\
\frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{-(x^2 + y^2) - 2y(x - y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è irrotazionale su Ω.

(c) Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è irrotazionale su Ω, ma Ω non è semplicemente connesso. Quindi non si può dedurre che $\mathbf{F}$ sia conservativo su Ω. Tuttavia, essendo irrotazionale, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo quando viene ristretto al primo quadrante (bordi esclusi). Pertanto il suo lavoro lungo la curva chiusa γ_1 è nullo. Invece il lavoro lungo la curva chiusa γ_2, contenente il punto in cui $\mathbf{F}$ non è definito, può essere calcolato scegliendo una qualunque circonferenza γ di centro $(0,0)$ e di raggio sufficientemente piccolo (ad esempio $r = 1$). Pertanto, scelta

$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,, \qquad \begin{cases} x' = -\sin\theta \\ y' = \cos\theta\,, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} L &= \int_\gamma F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} (-\sin\theta) + \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \cos\theta \right] \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta\cos\theta \right) \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\,. \end{aligned}$$

4. (a) La superficie S è la sfera di centro $O \equiv (0,0,0)$ e raggio r.

(b) Le equazioni parametriche della superficie S sono le stesse di S dove però i parametri sono limitati a variare nell'insieme $\Omega = \{(\varphi, \theta) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le \varphi \le \pi/2\,,\; 0 \le \theta \le \pi/2\}$. Pertanto, la massa totale di Σ è

$$\begin{aligned} M &= \iint_\Sigma \delta \,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \delta(\varphi,\theta)\, \|\mathbf{N}\| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\cos\theta\, r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= r^2 \left[\frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} \Big[\sin\theta \Big]_0^{\pi/2} = \frac{r^2}{2}\,. \end{aligned}$$

Inoltre, le coordinate del baricentro di Σ sono

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{M} \iint_\Sigma x\delta \,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{M} \iint_\Omega x(\varphi,\theta)\delta(\varphi,\theta)\, \|\mathbf{N}\| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2}{r^2} \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\pi/2} r\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi\cos\theta\, r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2r \int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin^2\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= 2r \left[\frac{\sin^3\varphi}{3} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{6}\, r \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_B &= \frac{1}{M}\iint_\Sigma y\delta \, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{M}\iint_\Omega y(\varphi,\theta)\delta(\varphi,\theta)\, \|\mathbf{N}\| \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{r^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\, r^2\sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2r\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\sin 2\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2r\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{3}\, r
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_B &= \frac{1}{M}\iint_\Sigma z\delta \, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{M}\iint_\Omega z(\varphi,\theta)\delta(\varphi,\theta)\, \|\mathbf{N}\| \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2}{r^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\cos\varphi\cos\theta\, r^2\sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2r\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos^2\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2}\cos\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2r\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2}{3}\, r\,.
\end{aligned}
$$

In conclusione, si ha

$$B \equiv \left(\frac{\pi r}{6}, \frac{r}{3}, \frac{2r}{3}\right)\,.$$

5. Considerando l'usuale parametrizzazione della sfera, la superficie Σ è la porzione di sfera delimitata dalle condizioni $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Pertanto, applicando il teorema di Stokes, si ha

$$L = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$$

dove $\Omega = [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \times [0, 2\pi]$. Poiché

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1,1,1)$$

e $\mathbf{N} = 2\sin\varphi(x,y,z)_\Sigma$, si ha

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\pi/6}^{\pi/3}\int_0^{2\pi} 2\sin\varphi(2\sin\varphi\cos\theta + 2\sin\varphi\sin\theta + 2\cos\varphi)\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= 4\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left[\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi)\ \mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left[\sin^2\varphi\sin\theta - \sin^2\varphi\cos\theta + \theta\sin\varphi\cos\varphi\right]_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi\int_{\pi/6}^{\pi/3}\sin 2\varphi\ \mathrm{d}\varphi \\
&= 4\pi\left[-\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_{\pi/6}^{\pi/3} \\
&= 2\pi\,.
\end{aligned}$$