Autovalutazione #2

1. Sia $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i parallelepipedi che giacciono nel primo ottante con tre facce sui piani coordinati e un vertice sul piano $\pi\ :\ 3x + 2y + z - 3 = 0$. Determinare il parallelepipedo in $\mathcal{P}$ di volume massimo e calcolarne il volume.

2. Sia
$$I = \iiint_\Omega xyz \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$
   (a) Calcolare I per fili.
   (b) Calcolare I per strati.
   (c) Calcolare I utilizzando le coordinate sferiche.

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (y^2 + 2xy, x + y)$ lungo il bordo γ, orientato positivamente, del dominio
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x \leq \sqrt{3}y \leq 3x\}\,.$$

4. Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x + y + z, x^2 + y^2, -2yz)$ lungo il bordo, orientato positivamente, della superficie $\Sigma = S \cap \Omega$, dove S è la sfera con centro in $O \equiv (0, 0, 0)$ e di raggio r e
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\ :\ y \geq |x|\,,\ -r/2 \leq z \leq r/2\}\,.$$

5. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x^3, y^3, z^3)$ attraverso la superficie chiusa Σ, orientata verso l'esterno, data dal cilindro $x^2 + y^2 = r^2$, $0 \leq z \leq h$, e dai due dischi che ne formano la base inferiore e la base superiore.

Soluzioni

1. Un parallelepipedo P in $\mathcal{P}$ è determinato dai tre vertici $X \equiv (x,0,0)$, $Y \equiv (0,y,0)$ e $Z \equiv (0,0,z)$, dove $x,y,z > 0$ e il vertice $A \equiv (x,y,z)$ appartiene al piano π. Quindi il volume di P è $V = xyz$, con $3x + 2y + z - 3 = 0$. Pertanto, per $z = 3 - 3x - 2y$, si ha
$$V = xy(3 - 3x - 2y) = 3xy - 3x^2y - 2xy^2 .$$
Si tratta quindi di determinare i massimi di questa funzione sotto il vincolo $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Iniziamo a cercare i punti critici di V. Si ha
$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 3y - 6xy - 2y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 3x - 3x^2 - 4xy = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (3 - 6x - 2y)y = 0 \\ x(3 - 3x - 4y) = 0 . \end{cases}$$
Consideriamo la prima equazione. Se $y = 0$, la seconda equazione diventa $x(3 - 3x) = 0$ e quindi si ha $x = 0$ oppure $x = 1$. ossia si hanno i punti $P_1 \equiv (0,0)$ e $P_2 \equiv (1,0)$. Se invece $y \neq 0$, allora deve essere $3 - 6x - 2y = 0$, ossia $y = \frac{3}{2} - x$. In questo caso, la seconda equazione diventa $x(9x - 3) = 0$ e quindi si ha $x = 0$ oppure $x = \frac{1}{3}$, ossia si hanno i punti $P_3 \equiv (0, \frac{3}{2})$ e $P_4 \equiv (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$. I punti P_1, P_2 e P_3 giacciono su un piano coordinato e quindi non possono essere punti di massimo (poiché il volume è nullo). L'unico punto in cui si può avere un massimo è P_4. la matrice Hessiana di V è
$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -6y & 3 - 6x - 4y \\ 3 - 6x - 4y & -4x \end{bmatrix} .$$
Poiché
$$\det H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) = -1 < 0 ,$$
il punto P_4 è effettivamente un punto di massimo per la funzione V. Pertanto il parallelepipedo cercato è determinato dal punto $A \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right)$ e ha volume $V = \frac{1}{6}$.

2. (a) Poiché $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D, \ 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\}$, dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq r^2, \, x \geq 0, \, y \geq 0\}$, si può calcolare I per fili:
$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left[\int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} xyz \, \mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \iint_D \left[xy \frac{z^2}{2} \right]_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2} \iint_D xy(r^2 - x^2 - y^2) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y . \end{aligned}$$
Passando alle coordinate polari (nel piano), l'insieme D è determinato dalle condizioni $0 \leq \rho \leq r$ e $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Quindi, si ha
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^r \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta \cos\theta (r^2 - \rho^2) \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^r (r^2\rho^3 - \rho^5) \, \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4} \left[r^2 \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right]_0^r \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{r^6}{48} . \end{aligned}$$

(b) Poiché $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \le z \le r \,, \ (x,y) \in D_z\}$, dove $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \le r^2 - z^2, \, x \ge 0, \, y \ge 0\}$, si può calcolare I per strati:

$$I = \int_0^r \left[\iint_{D_z} xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z \, .$$

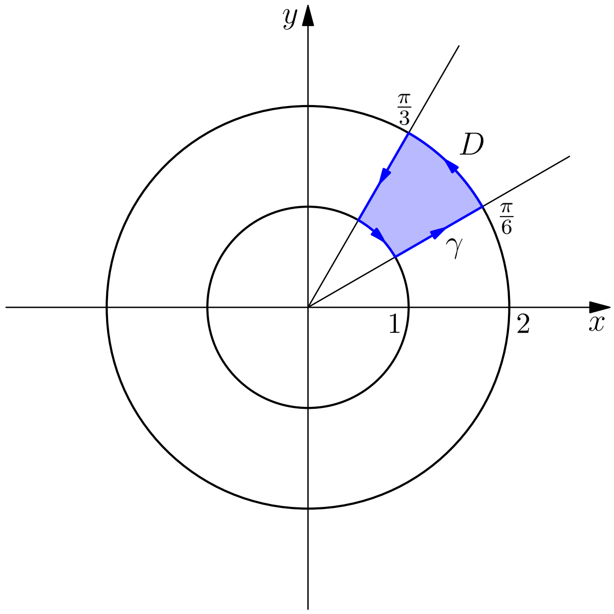
Passando alle coordinate polari, l'insieme D_z è determinato dalle condizioni $0 \le \rho \le \sqrt{r^2-z^2}$ e $0 \le \theta \frac{\pi}{2}$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^r \left[\int_0^{\sqrt{r^2-z^2}} \int_0^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta \cos\theta z \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}z \\
&= \int_0^r z \left[\int_0^{\sqrt{r^2-z^2}} \rho^3 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2} \int_0^r z \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{r^2-z^2}} \left[-\frac{\cos 2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{8} \int_0^r z (r^2 - z^2)^2 \mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{16} \int_0^r (-2z)(r^2-z^2)^2 \mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{16} \left[\frac{(r^2-z^2)^3}{3} \right]_0^r \\
&= \frac{r^6}{48} \, .
\end{aligned}$$

(c) In coordinate sferiche l'insieme Ω è determinato dalle condizioni $0 \le \rho \le r$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^r \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \rho \sin\varphi \cos\theta \, \rho \sin\varphi \sin\theta \, \rho \cos\varphi \ \rho^2 \sin\varphi \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^r \rho^5 \, \mathrm{d}\rho \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin^3\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_0^r \left[\frac{\sin^4\varphi}{4} \right]_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{r^6}{48} \, .
\end{aligned}$$

3. La regione D è la parte di corona circolare di centro O e raggi 1 e 2 compresa tra le due rette di equazione $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ e $y = \sqrt{3}\, x$, come si vede nella figura seguente



Poiché D è una regione semplice, per il teorema di Gauss-Green, si ha

$$L = \int_\gamma F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (1 - 2x - 2y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \,.$$

Passando alle coordinate polari, si ha

$$D' = \left\{ (\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \quad 1 \leq \rho \leq 2 \,, \; \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

e quindi

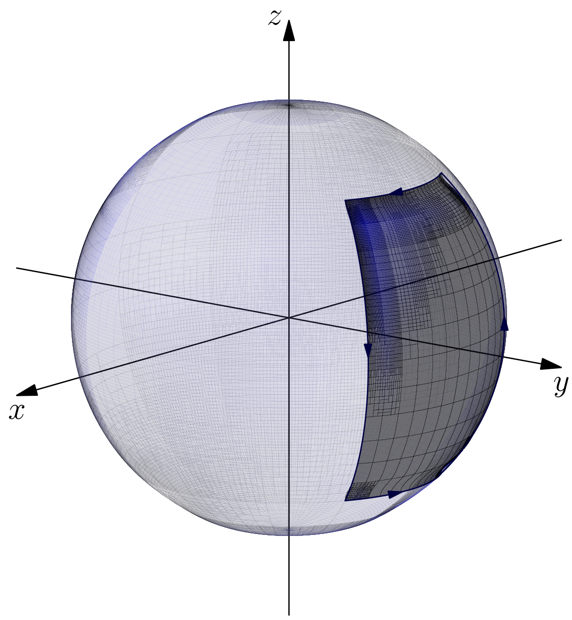
$$\begin{aligned}
L &= \iint_{D'} (1 - 2\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_1^2 \rho \left[\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1 - 2\rho\cos\theta - 2\rho\sin\theta) \,\mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^2 \rho \Big[\theta - 2\rho\sin\theta + 2\rho\cos\theta \Big]_{\pi/6}^{\pi/3} \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^2 \rho \left(\frac{\pi}{3} - 2\rho\sin\frac{\pi}{3} + 2\rho\cos\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\rho\sin\frac{\pi}{6} - 2\rho\cos\frac{\pi}{6} \right) \mathrm{d}\rho \\
&= \int_1^2 \left(\frac{\pi}{6}\,\rho + 2(1 - \sqrt{3})\rho^2 \right) \mathrm{d}\rho \\
&= \left[\frac{\pi}{6}\,\frac{\rho^2}{2} + 2(1 - \sqrt{3})\frac{\rho^3}{3} \right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{6}\,\frac{4}{2} + 2(1 - \sqrt{3})\frac{8}{3} - \frac{\pi}{6}\,\frac{1}{2} - 2(1 - \sqrt{3})\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

ossia

$$L = \frac{\pi}{4} + \frac{14}{3}\,(1 - \sqrt{3}) \,.$$

4. La superficie Σ è la porzione della sfera S che ha le seguenti equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \\ \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]. \end{array}$$



Usando il teorema di Stokes, si ha

$$L = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint_D \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \, .$$

Poiché si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y+z & x^2+y^2 & -2yz \end{vmatrix} = (-2z, 1, 2x-1)$$

e $\mathbf{N} = r\sin\varphi\,(x,y,z)_\Sigma$, si ha

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle &= r\sin\varphi\,(-2xz + y + 2xz - z)_\Sigma \\ &= r\sin\varphi\,(y - z)_\Sigma \\ &= r^2\sin\varphi\,(\sin\varphi\sin\theta - \cos\varphi)\, . \end{aligned}$$

Quindi, si ha

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} r^2 \sin\varphi \, (\sin\varphi \sin\theta - \cos\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= r^2 \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left[\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sin^2\varphi \sin\theta - \sin\varphi \cos\varphi) \mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\varphi \\
&= r^2 \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left[-\sin^2\varphi \cos\theta - \frac{\theta}{2} \sin 2\varphi \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\varphi \\
&= r^2 \int_{\pi/3}^{2\pi/3} \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \sin^2\varphi - \frac{\pi}{4} \sin 2\varphi \right) \mathrm{d}\varphi \\
&= r^2 \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \, \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi \cos\varphi + \frac{\pi}{8} \cos 2\varphi \right]_{\pi/3}^{2\pi/3} \\
&= r^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8} \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{8} \frac{1}{2} \right) \\
&= r^2 \left(\frac{\pi}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \, r^2 \, .
\end{aligned}$$

5. Sia Ω la regione di $\mathbb{R}^3$ che ha la superficie Σ come bordo. Usando il teorema della divergenza, si ha

$$\Phi = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_\Omega (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Passando alle coordinate cilindriche, la regione Ω è determinata dalle condizioni $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq t \leq h$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi &= 3 \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^h (\rho^2 + t^2) \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}t \\
&= 3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r \left[\int_0^h (\rho^3 + \rho t^2) \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\rho \\
&= 6\pi \int_0^r \left[\rho^3 t + \rho \frac{t^3}{3} \right]_0^h \mathrm{d}\rho \\
&= 6\pi \int_0^r \left(\rho^3 h + \rho \frac{h^3}{3} \right) \mathrm{d}\rho \\
&= 6\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \, h + \frac{\rho^2}{2} \, \frac{h^3}{3} \right]_0^r \\
&= \frac{3r^2 + 2h^2}{2} \, \pi h r^2 \, .
\end{aligned}$$