Autovalutazione #3

1. (a) Utilizzando la definizione, verificare che la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = y^2 \sqrt[3]{x}$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.
   (b) Scrivere l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z = f(x,y)$ nel punto $P_0 = (0,0,f(0,0))$.
   (c) Stabilire la natura del punto $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ per f.

2. Siano γ_1, γ_2 e γ_3 le semicirconferenze contenute nel semipiano $y \geq 0$ rispettivamente di centro $C_1 \equiv (0,0)$, $C_2 \equiv (-r,0)$ e $C_3 \equiv (r,0)$ e di raggio $r_1 = 2r$, $r_2 = r_3 = r$.
   (a) Determinare il baricentro B_1 della regione piana Ω_1 delimitata dall'asse x e dalla curva γ_1.
   (b) Determinare il baricentro B_2 della regione piana Ω_2 racchiusa dalle curve γ_1, γ_2 e γ_3.

3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (2xy + y^2 - y, 3xy + x^2 + y)$ lungo il bordo γ, orientato positivamente, della regione

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq |x|, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

4. Calcolare l'area e le coordinate del baricentro della superficie $\Sigma = S \cap D$, dove S è la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ e

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad 0 \leq \sqrt{2}z \leq r\}.$$

5. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (xz + y, x^2 y, y^2 z)$ attraverso la superficie chiusa $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, orientata verso l'esterno, dove Σ_1 è il cono rotondo definito dalle condizioni $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $0 \leq z \leq h$ e Σ_2 è il disco di centro $(0,0,h)$ e di raggio h che giace sul piano $\pi \ : \ z = h$.

Soluzioni

1. (a) Si ha $f(0,0) = 0$. Inoltre, f è derivabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, poiché possiede entrambe le derivate parziali nel punto considerato:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0\,.$$

Pertanto, si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Infine, per verificare la differenziabilità di f in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, dobbiamo calcolare il seguente limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\rangle}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y)\rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \end{aligned}$$

Passando alle coordinate polari, si ha

$$L = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2 \sin^2\theta \sqrt[3]{\rho\cos\theta}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\sqrt[3]{\rho}\,\sin^2\theta\sqrt[3]{\cos\theta} = 0$$

uniformemente rispetto a θ (poiché $\rho\sqrt[3]{\rho}\,\sin^2\theta\sqrt[3]{\cos\theta} \le \rho\sqrt[3]{\rho} \to 0$ per $\rho \to 0^+$). Poiché $L = 0$, possiamo concludere che la funzione f è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.

(b) L'equazione del piano tangente a una superficie di equazione $z = f(\mathbf{x})$ in un punto $P_0 = (\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ è

$$z = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\rangle\,.$$

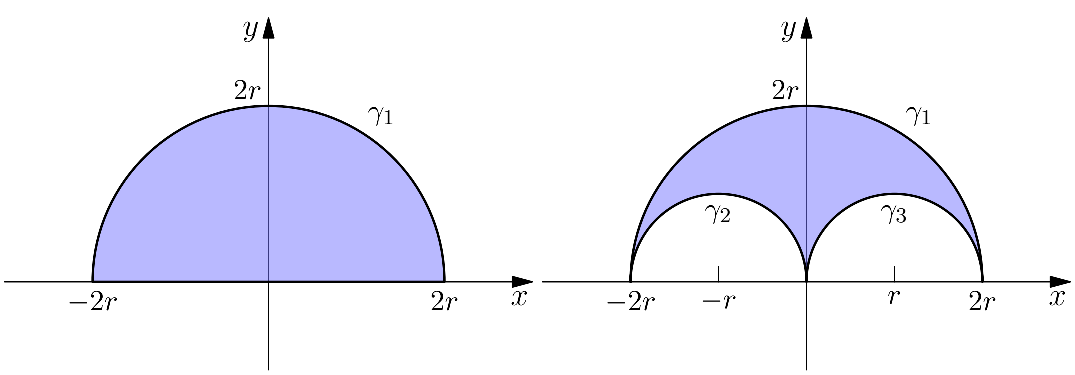
Nel nostro caso, essendo $f(0,0) = 0$ e $\nabla f(0,0) = 0$, si ha $z = 0$.

(c) Poiché $\nabla f(0,0) = 0$, il punto $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ è critico per f. Inoltre, si ha $f(x,y) \ge 0$ se e solo se $x \ge 0$. Pertanto, comunque si scelga un interno di $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, la funzione f continua a cambiare di segno. Di conseguenza, $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ è un punto di sella per f.

2. Le tre curve date hanno equazione

$$\gamma_1 \;:\; y = \sqrt{4r^2 - x^2}\,, \qquad \gamma_2 \;:\; y = \sqrt{-2rx - x^2}\,, \qquad \gamma_3 \;:\; y = \sqrt{2rx - x^2}\,.$$

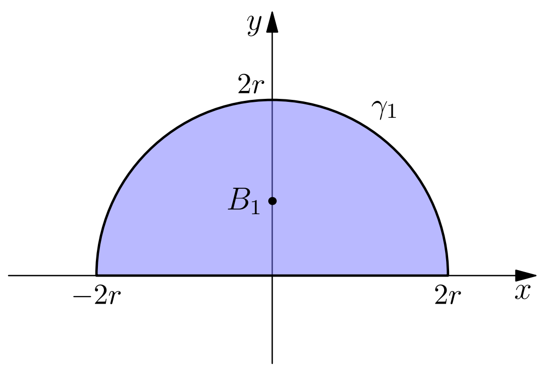
Le due regioni sono Ω_1 e Ω_2 sono



(a) Per simmetria, si ha $x_{B_1} = 0$. Poiché $\mathcal{A}(\Omega_1) = 2\pi r^2$, si ha

$$\begin{aligned} y_{B_1} &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Omega_1)} \iint_{\Omega_1} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \int_{-2r}^{2r} \int_0^{\sqrt{4r^2-x^2}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \int_{-2r}^{2r} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{4r^2-x^2}} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \int_{-2r}^{2r} (4r^2 - x^2) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \left[4r^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2r}^{2r} \\ &= \frac{8r}{3\pi} \,. \end{aligned}$$

Si ha



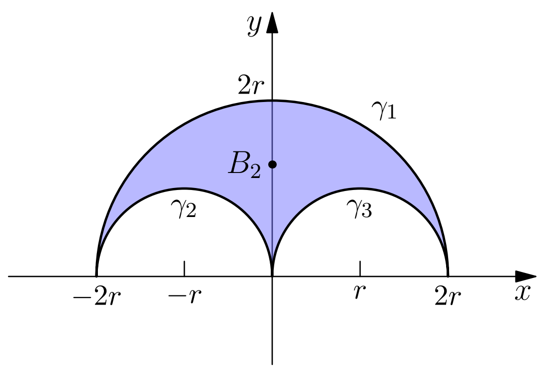
(b) Per simmetria, si ha $x_{B_2} = 0$. La regione Ω_2 è y-semplice (ma non x-semplice). Infatti $\Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x \in [-2r, 2r] \,,\; g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, dove

$$g_1(x) = \begin{cases} \sqrt{-2rx - x^2} & x \in [-2r, 0] \\ \sqrt{2rx - x^2} & x \in [0, 2r] \end{cases} \qquad \text{e} \qquad g_2(x) = \sqrt{4r^2 - x^2}\,.$$

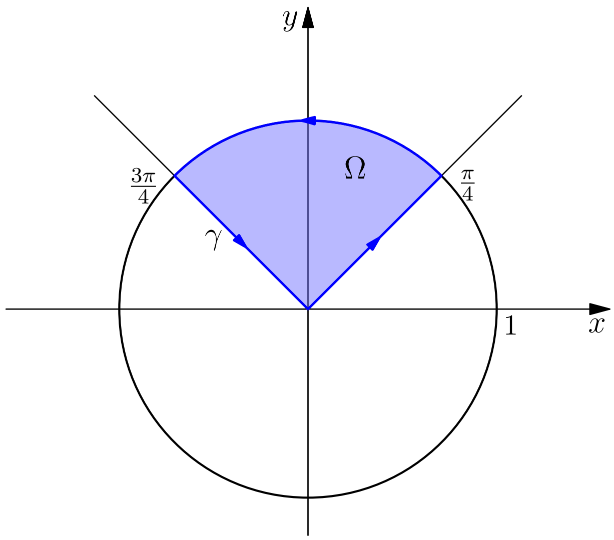
Poiché $\mathcal{A}(\Omega_2) = 2\pi r^2 - \pi r^2 = \pi r^2$, si ha

$$
\begin{aligned}
y_{B_2} &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Omega_2)} \iint_{\Omega_2} y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \int_{-2r}^{2r} \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} y \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \int_{-2r}^{0} \left[\int_{\sqrt{-2rx-x^2}}^{\sqrt{4r^2-x^2}} y \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi r^2} \int_{0}^{2r} \left[\int_{\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{4r^2-x^2}} y \,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \int_{-2r}^{0} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{-2rx-x^2}}^{\sqrt{4r^2-x^2}} \mathrm{d}x + \frac{1}{\pi r^2} \int_{0}^{2r} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{4r^2-x^2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi r^2} \int_{-2r}^{0} (2r^2 + rx)\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi r^2} \int_{0}^{2r} (2r^2 - rx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi r} \left[2rx + \frac{x^2}{2} \right]_{-2r}^{0} + \frac{1}{\pi r} \left[2rx - \frac{x^2}{2} \right]_{0}^{2r} \\
&= \frac{1}{\pi r} \left(4r^2 - 2r^2 \right) + \frac{1}{\pi r} \left(4r^2 - 2r^2 \right) \\
&= \frac{4r}{\pi}\,.
\end{aligned}
$$

Si ha



3. Come si vede dalla seguente figura



la regione Ω è semplice. Quindi, per il teorema di Gauss-Green, si ha

$$L = \int_\gamma F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \iint_\Omega (1+y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,.$$

Passando alle coordinate polari, la regione Ω è determinata dalle condizioni $0 \le \rho \le r$ e $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^r \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1+\rho\sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^r \rho \left[\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1+\rho\sin\theta) \,\mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^r \rho \Big[\theta - \rho\cos\theta \Big]_{\pi/4}^{3\pi/4} \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^r \rho \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\rho}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{\sqrt{2}} \right) \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^r \left(\frac{\pi}{2}\,\rho + \sqrt{2}\,\rho^2 \right) \mathrm{d}\rho \\
&= \left[\frac{\pi}{4}\,\rho^2 + \sqrt{2}\,\frac{\rho^3}{3} \right]_0^r \\
&= \frac{\pi}{4}\,r^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}\,r^3 \,.
\end{aligned}$$

4. La superficie Σ è la porzione di sfera determinata dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right], \ \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

L'area di Σ è

$$\mathcal{A} = \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \|\mathbf{N}(\varphi,\theta)\| \,\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta$$

dove $\mathbf{N}(\varphi,\theta)$ è il vettore normale a Σ. Poiché $\|\mathbf{N}(\varphi,\theta)\| = r^2\sin\varphi$, si ha

$$\mathcal{A} = \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = r^2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi r^2}{2\sqrt{2}}.$$

Sia $B \equiv (x_B, y_B, z_B)$ il baricentro di Σ. Poiché Σ è simmetrica rispetto al piano di equazione $y = x$, si ha $x_B = y_B$, dove

$$\begin{aligned}
x_B &= \frac{1}{\mathcal{A}}\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\mathcal{A}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} x(\varphi,\theta)\,\|\mathbf{N}(\varphi,\theta)\|\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\mathcal{A}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\sin\varphi\cos\theta\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{r^3}{\mathcal{A}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{r^3}{\mathcal{A}}\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi/2}\Big[\sin\theta\Big]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\pi r}\,\frac{r^3}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{(2+\pi)\,r}{2\sqrt{2}\,\pi}.
\end{aligned}$$

Analogamente, si ha

$$\begin{aligned}
z_B &= \frac{1}{\mathcal{A}}\iint_\Sigma z\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\mathcal{A}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} z(\varphi,\theta)\,\|\mathbf{N}(\varphi,\theta)\|\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\mathcal{A}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\, r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \frac{r^3}{\mathcal{A}}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{r^3}{\mathcal{A}}\,\frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi r}\,\frac{\pi r^3}{8} = \frac{r}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

In conclusione, si ha

$$B \equiv \left(\frac{(2+\pi)r}{2\sqrt{2}\,\pi}, \frac{(2+\pi)r}{2\sqrt{2}\,\pi}, \frac{r}{2\sqrt{2}}\right).$$

5. Per il teorema della divergenza, il flusso cercato è

$$\Phi = \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove Ω è la regione di $\mathbb{R}^3$ che ha per bordo la superficie Σ, ossia

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le h\}.$$

Poiché $\operatorname{div}\mathbf{F} = z + x^2 + y^2$, si ha

$$\Phi = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Passando alle coordinate cilindriche, si ha che Ω è determinato dalle condizioni $\rho^2 \leq t^2$ e $0 \leq t \leq h$, ossia $0 \leq \rho \leq t$ e $0 \leq t \leq h$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^h (\rho^2 + t)\rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^h \left[\int_0^t (\rho^3 + t\rho) \, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}t \\
&= 2\pi \int_0^h \left[\frac{\rho^4}{4} + t\frac{\rho^2}{2} \right]_0^t \mathrm{d}t \\
&= 2\pi \int_0^h \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{2} \right) \mathrm{d}t \\
&= \pi \left[\frac{t^5}{10} + \frac{t^4}{4} \right]_0^h \\
&= \frac{2h+5}{20}\, \pi h^4 \,.
\end{aligned}$$