Autovalutazione #4

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = (x^2 - 2y)(y^2 - 2x)\,.$$
   (a) Studiare il segno di f.
   (b) Determinare i punti di massimo e minimo di f.
   (c) Scrivere l'equazione della curva di livello γ di f che passa per il punto $\mathbf{x}_0 = (1,-1)$. Inoltre, scrivere l'equazione della retta tangente a γ nel punto $\mathbf{x}_0$.
   (d) Calcolare le derivate direzionali $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ e $D_{\mathbf{v},\mathbf{w}}f(\mathbf{x}_0)$, dove $\mathbf{v} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $\mathbf{w} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\mathbf{x}_0 = (1,-1)$.

2. Determinare il baricentro della regione
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \leq r^2,\; 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}\,.$$

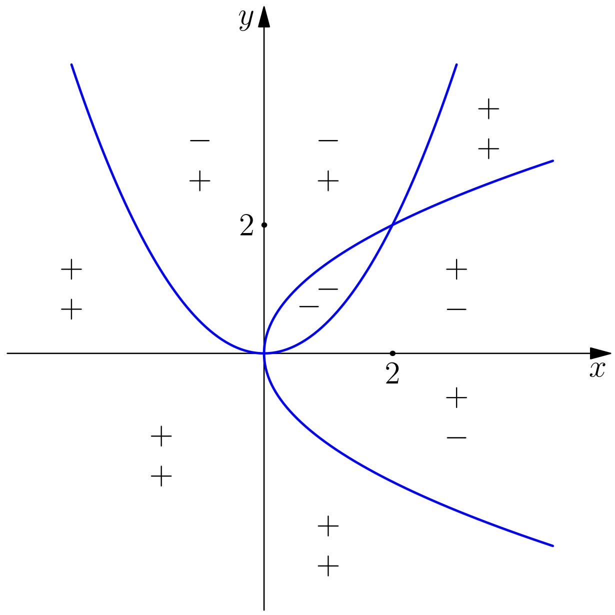
3. Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (y^2, xy, xz)$ lungo la curva γ, ottenuta intersecando il piano di equazione $y = z$ con la superficie cilindrica di equazione $x^2 + y^2 = 2x$. Il valore trovato dipende dall'orientazione di γ?

4. Calcolare la coordinata z del baricentro della superficie Σ definita come la porzione della superficie di equazione $z = xy$ che si proietta sulla regione piana
$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{3}x,\; x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

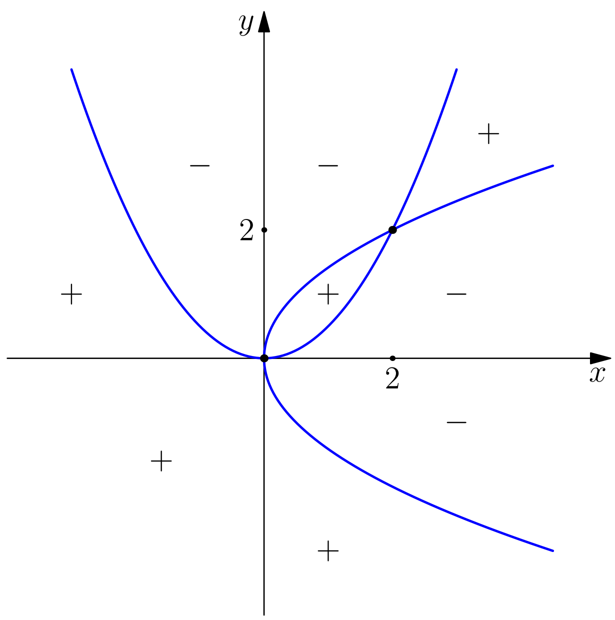
5. Sia dato il campo di forze centrale $\mathbf{F} = \dfrac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
   (a) Mostrare che $\mathbf{F}$ è un campo conservativo.
   (b) Determinare un potenziale di $\mathbf{F}$.
   (c) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ dal punto $P \equiv (1,0,-1)$ al punto $Q \equiv (2,1,2)$.

Soluzioni

1. (a) Si ha $f(x,y) \geq 0$ sse $(x^2 - 2y)(y^2 - 2x) \geq 0$. Studiando il segno dei due fattori, separatamente, si ha $x^2 - 2y \geq 0$ e $y^2 - 2x \geq 0$, ossia $y \leq \frac{1}{2}x^2$ e $x \leq \frac{1}{2}y^2$. Pertanto, si ha



dove il segno in alto si riferisce alla prima condizione, mentre il segno in basso si riferisce alla seconda condizione. Mettendo insieme queste condizioni, si ha che f si annulla lungo le due parabole di equazioni $y = \frac{1}{2}x^2$ e $x = \frac{1}{2}y^2$ è positiva nelle regioni contrassegnate da un $+$ ed negativa nelle regioni contrassegnate da un $-$:



(b) Determiniamo i punti critici di $f(x,y) = x^2y^2 - 2x^3 - 2y^3 + 4xy$, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2(xy^2 - 3x^2 + 2y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2(x^2y - 3y^2 + 2x) = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} xy^2 - 3x^2 + 2y = 0 \\ x^2y - 3y^2 + 2x = 0\,. \end{cases}$$

Moltiplicando la prima equazione per x e moltiplicando la seconda equazione per y, e poi sottraendo, si ottiene l'equazione $x^3 - y^3 = 0$, ossia $y = x$. Pertanto, ponendo $y = x$, il sistema di partenza si riduce alla sola equazione $x(x-1)(x-2) = 0$, dalla quale si ha $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$. Si hanno così solo tre punti critici, dati da $P_0 \equiv (0,0)$, $P_1 \equiv (1,1)$ e $P_2 \equiv (2,2)$. P_0 e P_2 sono sicuramente due punti di sella. Infatti, in corrispondenza di questi due punti la funzione f si annulla e, come si può facilmente vedere dalla seconda figura nel punto precedente, comunque si scelga un intorno di questi punti, in tale intorno la funzione f continua a cambiare di segno.

La matrice Hessiana di f è

$$H = \begin{bmatrix} 2(y^2 - 6x) & 4(xy+1) \\ 4(xy+1) & 2(x^2 - 6y) \end{bmatrix}.$$

Studiando $H(0,0)$ e $H(2,2)$ si ritrova che P_0 e P_2 sono sicuramente due punti di sella. Infine, poiché

$$\det H(1,1) = \begin{vmatrix} -10 & 8 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = 36 > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -10 < 0\,,$$

si ha che P_1 è un punto di massimo. Il valore assunto da f in questo punto è $f(1,1) = 1$. Poiché $f(3,3) = 9$, P_1 è solo un punto di massimo relativo, ma non assoluto.

(c) Le curve di livello di f hanno equazione $f(x,y) = k$. Pertanto, per ottenere la curva di livello cercata basta porre $f(1,-1) = k$, da cui si ha $k = -3$. Quindi γ ha equazione $f(x,y) = -3$, ossia

$$\gamma : x^2y^2 - 2x^3 - 2y^3 + 4xy + 3 = 0\,.$$

Infine, l'equazione della retta tangente a γ in $\mathbf{x}_0$ è

$$\langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0\,.$$

Poiché $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(1,-1) = (-8,-4)$, si ha $-8(x-1) - 4(y+1) = 0$, ossia $2x + y - 1 = 0$.

(d) Poiché f è una funzione liscia (essendo un polinomio), si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v} \rangle = -6\sqrt{2}$$
$$D_{\mathbf{v},\mathbf{w}} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{v}_T H(\mathbf{x}_0) \mathbf{w} = -12\,,$$

2. In coordinate cilindriche, la regione Ω è determinata dalle condizioni $\rho^2 \leq r^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq t \leq \rho^2$, ossia $0 \leq \rho \leq r$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq t \leq \rho^2$. Pertanto, il volume di Ω è

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Omega) &= \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho^2} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r \rho \left[\int_0^{\rho^2} \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\rho = 2\pi \int_0^r \rho\, \big[t\big]_0^{\rho^2} \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \int_0^r \rho^3 \mathrm{d}\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^r = \frac{\pi r^4}{2}\,. \end{aligned}$$

Per simmetria, si ha $x_B = y_B = 0$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} z_B &= \frac{1}{\mathcal{V}(\Omega)} \iiint_\Omega z \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \frac{2}{\pi r^4} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho^2} t \,\rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi r^4} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r \rho \left[\int_0^{\rho^2} t \,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\rho = \frac{4\pi}{\pi r^4} \int_0^r \rho \,\left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{\rho^2} \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{2}{r^4} \int_0^r \rho^5 \mathrm{d}\rho = \frac{2}{r^4} \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_0^r = \frac{r^2}{3} \,. \end{aligned}$$

3. Sia Σ la superficie piana che ammette l'ellisse γ come bordo. Allora, per il teorema di Stokes, si ha

$$L = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma \,.$$

Nel nostro caso, si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 & xy & xz \end{vmatrix} = (0, -z, -y) \,.$$

Scelto $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, 1)$ come versore normale al piano di γ, si ha

$$\langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (z - y) = 0$$

sul piano di equazione $y = z$. Pertanto, il lavoro richiesto è nullo e (in questo caso particolare) non dipende dall'orientazione di γ.

4. In coordinate polari, si ha $T = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq \rho \leq 1 \,,\ 0 \leq \theta \leq \pi/3\}$. Pertanto l'area di Σ è

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma) &= \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \iint_T \sqrt{1 + x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\pi/3} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho \sqrt{1 + \rho^2} \,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi(2\sqrt{2} - 1)}{9} \,. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} z_B &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \iint_\Sigma z \,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \iint_T xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2\mathcal{A}(\Sigma)} \int_0^{\pi/3} \sin 2\theta \,\mathrm{d}\rho \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1 + \rho^2} \,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{9(5 + 3\sqrt{2})}{140\pi} \end{aligned}$$

5. (a) Il campo $\mathbf{F}$ è definito su $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, che è una regione semplicemente connessa. Inoltre $\mathbf{F}$ è irrotazionale, essendo

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{vmatrix} = (0,0,0) \,.$$

Pertanto, $\mathbf{F}$ è un campo conservativo.

(b) Si vede facilmente che un potenziale di $\mathbf{F}$ è $U(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

(c) Essendo un campo conservativo, il lavoro di $\mathbf{F}$ dal punto $P \equiv (1, 0, -1)$ al punto $Q \equiv (2, 1, 2)$ è

$$L(P \to Q) = U(Q) - U(P) = U(2,1,2) - U(1,0,-1) = 3 - \sqrt{2} \,.$$