Autovalutazione #5

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \frac{x + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$
   (a) Determinare il segno di f.
   (b) Calcolare il gradiente e la matrice Hessiana di f.
   (c) Determinare la direzione di massimo accrescimento di f in corrispondenza del punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.
   (d) Utilizzando la definizione, calcolare la generica derivata direzionale di f nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.
   (e) Scrivere lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di f nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.
   (f) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di f.
   (g) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di f sul disco D che ha centro in $C \equiv (1,0)$ e che ha raggio 1.

2. Calcolare l'integrale
$$I = \iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2\}$, dove $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$.

3. Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (x \ln(x^2+y^2), y \ln(x^2+y^2))$.
   (a) Determinare il campo di esistenza Ω di $\mathbf{F}$.
   (b) Mostrare che $\mathbf{F}$ è irrotazionale su Ω.
   (c) Mostrare che $\mathbf{F}$ è conservativo su Ω.
   (d) Calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω.
   (e) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ per andare dal punto $P \equiv (2,2)$ al punto $Q \equiv (\sqrt{3}, 1)$.

4. Sia Σ la superficie di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0,\pi] \\ t \in [1,2] . \end{array}$$
   (a) Riconoscere la superficie Σ e disegnarla.
   (b) Calcolare la massa totale e il baricentro di Σ rispetto alla densità superficiale di massa $\delta(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + z$.

5. Sia Σ la porzione della sfera di centro $O \equiv (0,0,0)$ e raggio 2 contenuta nel semispazio $y \geq 0$, orientata verso l'esterno (della sfera).
   (a) Descrivere l'orientazione del bordo $\gamma = \partial\Sigma$. In particolare, dire se, viaggiando lungo la curva a partire dal punto $A \equiv (2,0,0)$, si incontra prima il punto $B \equiv (0,0,2)$ o il punto $C \equiv (0,0,-2)$.
   (b) Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x+y, 2x+z, x-y)$ lungo γ, orientata coerentemente con Σ.

Soluzioni

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \frac{x + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Si ha $f(x,y) \geq 0$ sse $x + x^2 + y^2 \geq 0$, ossia sse $(x + 1/2)^2 + y^2 \geq 1/4$. Pertanto, f si annulla lungo la circonferenza γ di centro $(-1/2, 0)$ e raggio $1/2$, ha segno negativo nei punti interni a γ e ha segno positivo nei punti esterni a γ.

(b) Le derivate parziali prime di f sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1 + 2x - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2(1-x)y}{(1 + x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

Quindi il gradiente di f è

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{1 + 2x - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2}, \frac{2(1-x)y}{(1 + x^2 + y^2)^2} \right).$$

Le derivate parziali seconde di f sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2\frac{1 - 3x - 3x^2 + y^2 + x^3 - 3xy^2}{(1 + x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -2\frac{(1 + 4x - 3x^2 + y^2)y}{(1 + x^2 + y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2\frac{(1-x)(1 + x^2 - 3y^2)}{(1 + x^2 + y^2)^3}. \end{aligned}$$

Quindi la matrice Hessiana di f è

$$H = \frac{2}{(1 + x^2 + y^2)^3} \begin{bmatrix} 1 - 3x - 3x^2 + y^2 + x^3 - 3xy^2 & -(1 + 4x - 3x^2 + y^2)y \\ -(1 + 4x - 3x^2 + y^2)y & (1-x)(1 + x^2 - 3y^2) \end{bmatrix}.$$

(c) La direzione di massimo accrescimento di f in corrispondenza del punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ è

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{1}{3}, 0 \right).$$

(d) Sia $\mathbf{v} = (a,b)$ un generico versore (con $a^2 + b^2 = 1$). Allora, la derivata direzionale di f nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ nella direzione data da $\mathbf{v}$ è

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(1,1) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(1 + at, 1 + bt) - f(1,1)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\frac{1 + at + (1+at)^2 + (1+bt)^2}{1 + (1+at)^2 + (1+bt)^2} - 1 \right] \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{a}{1 + (1+at)^2 + (1+bt)^2} \\ &= \frac{a}{3}. \end{aligned}$$

Osservazione. Se non fosse stato chiesto di utilizzare la definizione, si sarebbe potuto utilizzare la formula del gradiente (poiché f è differenziabile, essendo composta da funzioni differenziabili). In questo caso, più semplicemente, si avrebbe avuto

$$D_{\mathbf{v}}f(1,1) = \langle \nabla f(1,1), \mathbf{v} \rangle = \frac{a}{3}\,.$$

(e) Lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di f nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ è

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)$$

per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Poiché $f(1,1) = 1$, $\nabla f(1,1) = (1/3, 0)$ e

$$H(1,1) = \frac{2}{3^3}\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{2}{9}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha

$$f(x,y) = 1 + \frac{1}{3}\,(x-1) - \frac{2}{9}\,(x-1)^2 - \frac{2}{9}\,(x-1)(y-1) + o(x^2+y^2)$$

per $(x,y) \to (0,0)$.

(f) Iniziamo a determinare i punti critici liberi di f. Essi si ricavano risolvendo il seguente sistema ottenuto mettendo a zero il gradiente di f:

$$\begin{cases} 1 + 2x - x^2 + y^2 = 0 \\ (1-x)y = 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ha $x = 1$ oppure $y = 0$. Se $x = 1$, la prima equazione diventa $2 + y^2 = 0$, che non ha soluzioni reali. Se $y = 0$, la prima equazione diventa $x^2 - 2x - 1 = 0$, da cui si ricava $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Si hanno così solo due punti critici, dati da $P_{1,2} \equiv (1 \pm \sqrt{2}, 0)$.
Posto $\alpha = 1 \pm \sqrt{2}$, si ha

$$H(1 \pm \sqrt{2}, 0) = H(\alpha, 0) = \frac{2}{(1+\alpha^2)^3}\begin{bmatrix} 1 - 3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3 & 0 \\ 0 & (1-\alpha)(1+\alpha^2) \end{bmatrix}.$$

Per valutare questa matrice, ricordiamo che $1 \pm \sqrt{2}$ sono le radici dell'equazione $x^2 - 2x - 1 = 0$. Questo significa che $\alpha^2 = 1 + 2\alpha$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} 1 - 3\alpha - 3\alpha^2 + \alpha^3 &= 1 - 3\alpha - 3(1+2\alpha) + \alpha(1+2\alpha) \\ &= -2 - 8\alpha + 2\alpha^2 = -2 - 8\alpha + 2(2\alpha+1) = -4\alpha \\ 1 + \alpha^2 &= 2(1+\alpha) \\ (1-\alpha)(1+\alpha^2) &= 2(1-\alpha^2) = -4\alpha\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$H(1 \pm \sqrt{2}, 0) = H(\alpha, 0) = \frac{2}{8(1+\alpha)^3}\begin{bmatrix} -4\alpha & 0 \\ 0 & -4\alpha \end{bmatrix} = -\frac{\alpha}{(1+\alpha)^3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, allora la matrice Hessiana possiede due autovalori negativi e quindi P_1 è un punto di massimo per f. Se $\alpha = 1 - \sqrt{2}$, allora la matrice Hessiana possiede due autovalori positivi e quindi P_2 è un punto di minimo per f.
Si tratta ora di dimostrare che i due punti trovati sono punti di minimo e massimo assoluti. Infatti, si ha

$$f(\alpha, 0) = \frac{\alpha + \alpha^2}{1 + \alpha^2} = \frac{\alpha(1+\alpha)}{2(1+\alpha)} = \frac{\alpha}{2}\,.$$

Inoltre, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\begin{aligned}
f(x,y) \le \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \le \frac{1+\sqrt{2}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x + 2(x^2+y^2) \le 1+\sqrt{2} + (1+\sqrt{2})(x^2+y^2) \\
&\Longleftrightarrow \quad (1-\sqrt{2})(x^2+y^2) + 2x - (1+\sqrt{2}) \le 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2 + \frac{2x}{1-\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} \ge 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2 - 2(1+\sqrt{2})x + (1+\sqrt{2})^2 \ge 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-1-\sqrt{2})^2 + y^2 \ge 0
\end{aligned}$$

e quest'ultima condizione è sempre verificata. Analogamente, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si ha

$$\begin{aligned}
f(x,y) \le \frac{1+\sqrt{2}}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{x+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \ge \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x + 2(x^2+y^2) \ge 1-\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})(x^2+y^2) \\
&\Longleftrightarrow \quad (1+\sqrt{2})(x^2+y^2) + 2x - (1-\sqrt{2}) \ge 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2 + \frac{2x}{1+\sqrt{2}} - \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \ge 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x^2+y^2 - 2(1-\sqrt{2})x + (1-\sqrt{2})^2 \ge 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (x-1+\sqrt{2})^2 + y^2 \ge 0
\end{aligned}$$

e quest'ultima condizione è sempre verificata. Abbiamo così dimostrato che

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \le f(x,y) \le \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi P_1 e P_2 sono punti di estremo assoluti per f.

(g) Poiché la funzione f è continua sul disco D e D è un insieme compatto (ossia è un insieme chiuso e limitato), per il teorema di Weierstrass la funzione f assume un valore massimo e un valore minimo assoluti su D. Poiché i due punti P_1 e P_2 sono esterni a D, questi due valori saranno assunti sul bordo γ di D, dove γ è la circonferenza di centro $C \equiv (1,0)$ e raggio 1. Pertanto γ ha equazione $(x-1)^2 + y^2 = 1$, ossia $x^2 + y^2 - 2x = 0$. A questo punto possiamo procedere in vari modi.

Primo modo. Sui punti della circonferenza γ si ha $x^2 + y^2 = 2x$. Quindi, quando restringiamo la funzione f su γ, si ottiene la funzione $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \frac{x+2x}{1+2x} = \frac{3x}{1+2x}.$$

Poiché

$$g'(x) = \frac{3}{(1+2x)^2} > 0$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, la funzione g è sempre crescente e quindi assumerà il suo valore minimo in $x = 0$ ed il suo valore massimo in $x = 2$. Pertanto, f assume il suo valore minimo assoluto su D nel punto $A_1 \equiv (0,0)$ e tale valore minimo è $g(0) = 0$. Analogamente, f assume il suo valore massimo assoluto su D nel punto $A_2 \equiv (2,0)$ e tale valore minimo è $g(2) = 6/5$.

Secondo modo. Possiamo parametrizzare γ ponendo $x = 1 + \cos\theta$ e $y = \sin\theta$, con $0 \le \theta \le 2\pi$. In questo modo, restringendo f alla curva γ si ottiene la funzione $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(\theta) = \frac{1 + \cos\theta + (1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}{1 + (1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = 3\,\frac{1 + \cos\theta}{3 + 2\cos\theta}\,.$$

Poiché

$$F'(\theta) = -3\,\frac{\sin\theta}{(3 + 2\cos\theta)^2}\,,$$

si ha $F'(\theta) \ge 0$ sse $\sin\theta \le 0$. Quindi F ha un massimo in $\theta = 0$ e un minimo in $\theta = \pi$. Per $\theta = 0$ si ha il punto $A_2 \equiv (2, 0)$, mentre per $\theta = \pi$ si ha il punto $A_1 \equiv (0, 0)$.

Terzo modo. Possiamo utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Consideriamo la Lagrangiana

$$L(x, y, \lambda) = \frac{x + x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2} - \lambda(x^2 + y^2 - 2x)\,.$$

I punti critici liberi di L si ottengono risolvendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{1 + 2x - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} - \lambda(2x - 2) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{2(1 - x)y}{(1 + x^2 + y^2)^2} - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 - 2x) = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \dfrac{1 + 2x - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} = -2\lambda(1 - x) \\ \dfrac{2(1 - x)y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava

$$\frac{(1 + 2x - x^2 + y^2)y}{(1 + x^2 + y^2)^2} = -\frac{2(1 - x)^2 y}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

da cui si ha

$$(1 + 2x - x^2 + y^2)y + 2(1 - x)^2 y = 0$$

ossia

$$(3 - 2x + x^2 + y^2)y = 0\,.$$

Eliminata λ, si ha pertanto il sistema

$$\begin{cases} (3 - 2x + x^2 + y^2)y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 3y = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

da cui si hanno le due soluzioni $x = y = 0$ e $x = 2$ e $y = 0$. Si ritrovano così i due punti A_1 e A_2. Poiché $f(0, 0) = 0$ e $f(2, 0) = 6/5$, in A_1 si ha il minimo assoluto e in A_2 si ha il massimo assoluto.

Quarto modo. Possiamo usare il metodo grafico delle curve di livello. Infatti, i punti di estremo vincolato di f vanno cercati tra i punti in cui le curve di livello di f sono tangenti al vincolo γ. Le curve di livello di f sono le curve γ_k di equazione $f(x, y) = k$, ossia

$$x + x^2 + y^2 = k(1 + x^2 + y^2)$$

ossia

$$(k - 1)(x^2 + y^2) - x + k = 0\,.$$

Si tratta quindi di circonferenze che hanno il centro sull'asse x. Pertanto γ_k è tangente a γ se e solo se passa per i punti di γ sull'asse x, ossia per $(0, 0)$ o per $(2, 0)$. Si ha che γ_k passa per $(0, 0)$ quando $k = 0$, mentre passa per $(2, 0)$ quando $k = 6/5$. Si ritrovano così i due punti trovati precedentemente.

2. L'insieme Ω è la corona sferica con centro nell'origine e raggi a e b. In coordinate sferiche, Ω è definito dalle condizioni $a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pertanto, si ha

$$I = \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\varphi}{\rho^3} \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta = \int_a^b \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \int_0^\pi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = 4\pi \ln \frac{b}{a} \, .$$

3. Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (x \ln(x^2+y^2), y \ln(x^2+y^2))$.

   (a) Il campo $\mathbf{F}$ è definito per $x^2+y^2 > 0$, ossia per $(x,y) \neq (0,0)$. Pertanto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   (b) Poiché
   $$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \, ,$$
   il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale su Ω.

   (c) Poiché l'insieme Ω non è semplicemente connesso, l'irrotazionalità di $\mathbf{F}$ non implica la conservatività di $\mathbf{F}$. Tuttavia, se mostriamo che il lavoro di $\mathbf{F}$ è nullo lungo ogni curva chiusa, possiamo concludere che $\mathbf{F}$ è conservativo. Consideriamo una curva chiusa γ. Se γ non contiene l'origine (dove il campo $\mathbf{F}$ non è definito), allora può essere racchiusa in una regione semplicemente connessa. Su questa regione il campo $\mathbf{F}$ è conservativo (essendo irrotazionale) e quindi il suo lavoro lungo γ è nullo. Se γ contiene l'origine, possiamo utilizzare l'invarianza del lavoro di un campo irrotazionale lungo curve omotope e calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo una particolare curva chiusa omotopa alla curva di partenza. Pertanto, possiamo scegliere γ come una qualunque circonferenza che ha centro nell'origine e raggio $r > 0$. Quindi, se γ ha equazioni parametriche $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, allora il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ è
   $$\begin{aligned} L &= \int_\gamma \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s} \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} (F_1(r\cos\theta, r\sin\theta)(-r\sin\theta) + F_2(r\cos\theta, r\sin\theta) r\cos\theta) \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (r\cos\theta \ln r^2 (-r\sin\theta) + r\sin\theta \ln r^2 (r\cos\theta)) \, \mathrm{d}\theta \\ &= 2r^2 \ln r \int_0^{2\pi} (-\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta) \, \mathrm{d}\theta \\ &= 0 \, . \end{aligned}$$
   Pertanto, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo su Ω.

   (d) Scelto il punto $X_= \equiv (1,0)$, un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω è dato da
   $$U(x,y) = \int_1^x F_1(t,0) \, \mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t) \, \mathrm{d}t = \int_1^x t \ln t^2 \, \mathrm{d}t + \int_0^y t \ln(x^2+t^2) \, \mathrm{d}t \, ,$$
   Consideriamo l'integrale
   $$I = \int t \ln(x^2+t^2) \, \mathrm{d}t \, .$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{t^2}{2}\,\ln(x^2+t^2) - \int \frac{t^2}{2}\,\frac{2t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^2}{2}\,\ln(x^2+t^2) - \int \frac{(x^2+t^2)t - x^2 t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^2}{2}\,\ln(x^2+t^2) - \int \left(t - \frac{x^2}{2}\,\frac{2t}{x^2+t^2} \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{t^2}{2}\,\ln(x^2+t^2) - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{x^2}{2}\,\ln(x^2+t^2) \right) \\ &= \frac{1}{2}\,(x^2+t^2)\ln(x^2+t^2) - \frac{t^2}{2}\,. \end{aligned}$$

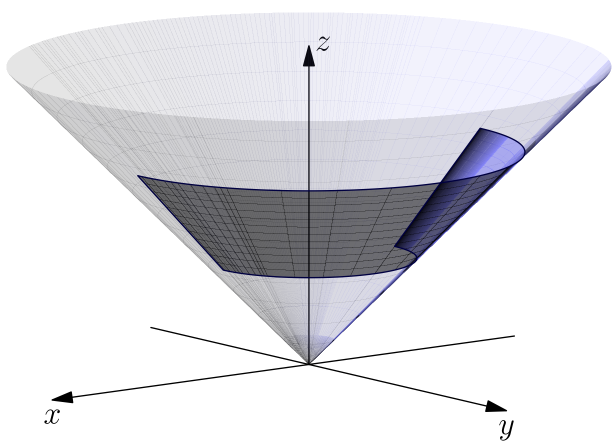
Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \left[\frac{t^2}{2}\,\ln t^2 - \frac{t^2}{2} \right]_1^x + \left[\frac{1}{2}\,(x^2+t^2)\ln(x^2+t^2) - \frac{t^2}{2} \right]_0^y \\ &= \frac{x^2}{2}\,\ln x^2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) - \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}\ln x^2 \\ &= \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)(\ln(x^2+y^2)-1) + \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

(e) Poiché $\mathbf{F}$ è conservativo, si ha

$$L(P \to Q) = U(Q) - U(P) = U(\sqrt{3}, 1) - U(2,2) = 2 - 8\ln 2\,.$$

4. (a) La coordinate dei punti della superficie Σ soddisfano l'equazione cartesiana $x^2+y^2=z^2$. Questa equazione rappresenta il cono circolare retto che ha vertice nell'origine e che ha come asse l'asse z. Quindi Σ è la porzione di questo cono contenuta nel semispazio $y \geq 0$ e compresa tra i due piani di equazione $z=1$ e $z=2$, come si vede nella seguente figura



(b) La massa totale di Σ è

$$M = \iint_\Sigma \delta\,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \delta(\theta,t)\,\|\mathbf{N}(\theta,t)\|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t$$

dove $\Omega = [0,\pi]\times[1,2]$. Sulla superficie Σ, la densità superficiale di massa (essendo t positivo) diventa

$$\delta(\theta,t) = \delta(t\cos\theta, t\sin\theta, t) = \sqrt{t^2} + t = |t| + t = 2t\,.$$

Inoltre, il vettore normale alla superficie Σ è

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -t\sin\theta & t\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (t\cos\theta, t\sin\theta, -t)$$

e $\|\mathbf{N}\| = \sqrt{2t^2} = \sqrt{2}\,t$. Pertanto, si ha

$$M = \int_0^\pi \int_1^2 2t\,\sqrt{2}\,t\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_1^2 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{14\sqrt{2}}{3}\,\pi\,.$$

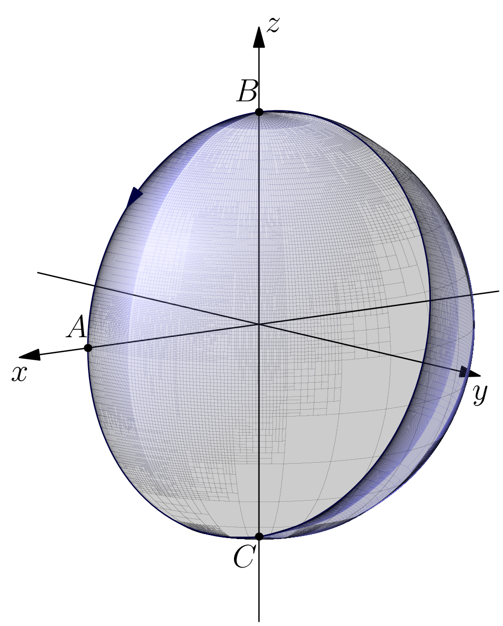
Per la simmetria di Σ, si ha $x_G = 0$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{1}{M}\iint_\Sigma y\delta\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{M}\iint_\Omega y(\theta,t)\delta(\theta,t)\,\|\mathbf{N}(\theta,t)\|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{14\sqrt{2}\,\pi}\int_0^\pi\int_1^2 t\sin\theta\,2t\,\sqrt{2}\,t\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t = \frac{3}{7\,\pi}\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_1^2 t^3\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{7\,\pi}\Big[-\cos\theta\Big]_0^\pi\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^2 = \frac{45}{14\pi} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{M}\iint_\Sigma z\delta\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{M}\iint_\Omega z(\theta,t)\delta(\theta,t)\,\|\mathbf{N}(\theta,t)\|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{14\sqrt{2}\,\pi}\int_0^\pi\int_1^2 t\,2t\,\sqrt{2}\,t\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t = \frac{3}{7\,\pi}\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_1^2 t^3\,\mathrm{d}t = \frac{3}{7}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^2 = \frac{45}{28} \end{aligned}$$

5. (a) La curva γ è la circonferenza di centro O e raggio 2 che giace sul piano xz. Poiché la superficie Σ è orientata scegliendo i versori che puntano verso l'esterno, il bordo $\gamma = \partial\Sigma$ è orientato in modo da andare da B ad A a C, come si vede nella seguente figura



(b) Primo modo. Possiamo calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ in modo diretto. Per quanto detto nel punto precedente, la curva γ ammette la seguente parametrizzazione

$$\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 0 \\ z = 2\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \, .$$

Tuttavia, l'orientazione di γ indotta da questa parametrizzazione è opposta all'orientazione di γ coerente con l'orientazione di Σ. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} L &= -\int_\gamma \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s}\rangle = -\int_\gamma F_1 \,\mathrm{d}x + F_2 \,\mathrm{d}y + F_3 \,\mathrm{d}z \\ &= -\int_0^{2\pi} (2\cos\theta(-2\sin\theta) + 2\cos\theta \, 2\cos\theta) \,\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{2\pi} (\sin\theta\cos\theta - \cos^2\theta) \,\mathrm{d}\theta \\ &= 4\left[-\frac{1}{4}\cos 2\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2}\,\sin\theta\cos\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= -4\pi \, . \end{aligned}$$

Secondo modo. Possiamo calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ mediante il teorema di Stokes. In questo caso, rappresentando la superficie Σ mediante le usuali equazioni parametriche, con $0 \le \varphi \le \pi$ e $0 \le \theta \le \pi$, si ha

$$L = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_\Omega \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

dove $\Omega = [0, \pi] \times [0, \pi]$. Poiché

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x+y & 2x+z & x-y \end{vmatrix} = (-2, -1, 1)$$

e $\mathbf{N} = 2\sin\varphi(x, y, z)_\Sigma$, si ha $\langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle = 2\sin\varphi(-2x - y + z)_\Sigma$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \int_0^\pi 2\sin\varphi(-4\sin\varphi\cos\theta - 2\sin\varphi\sin\theta + 2\cos\varphi) \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^\pi \left[\int_0^\pi (-2\sin^2\varphi\cos\theta - \sin^2\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi) \,\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\varphi \\ &= 4\int_0^\pi \big[-2\sin^2\varphi\sin\theta + \sin^2\varphi\cos\theta + \theta\sin\varphi\cos\varphi\big]_0^\pi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= 4\int_0^\pi \left(-2\sin^2\varphi + \frac{\pi}{2}\,\sin 2\varphi\right) \mathrm{d}\varphi \\ &= 4\left[-\varphi + \sin\varphi\cos\varphi - \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos 2\varphi}{2}\right]_0^\pi \\ &= -4\pi \, . \end{aligned}$$

Terzo modo. Possiamo calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ mediante il teorema di Stokes, ma relativamente alla superficie Σ' data dal disco che ha γ come bordo. Poiché Σ' giace sul piano xz, questa volta si ha $\mathbf{N} = (0, 1, 0)$. Con questa scelta, la curva $\gamma = \partial\Sigma'$ è orientata come richiesto. Poiché Σ' può essere parametrizzata mediante le equazioni $x = \rho\cos\theta$, $y = 0$, $z = \rho\sin\theta$, con $0 \le \rho \le 2$ e $0 \le \theta \le 2\pi$, si ha

$$L = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \,\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_{\Omega'} \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N}\rangle \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = -\int_0^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = -4\pi \, .$$