Autovalutazione #6

1. Siano $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ e $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ le funzioni definite da

$$F(x,y,z)=(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{y-z},\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^z)$$
$$G(x,y)=(x^2+y^2,x^2-xy,xy-y^2)\,.$$

   Calcolare la matrice jacobiana della funzione composta $G\circ F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ nel punto $\mathbf{x}_0=(0,0,0)$.

2. Calcolare l'integrale

$$I=\iint_\Omega (2x-y)(x-2y)\,\mathrm{e}^{(x-2y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   dove Ω è il parallelogrammo di vertici $O\equiv(0,0)$, $A\equiv(2,1)$, $B\equiv(1,2)$ e $C\equiv(3,3)$.

3. Sia dato il campo vettoriale $\mathbf{F}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right)$.

   (a) Determinare il campo di esistenza Ω di $\mathbf{F}$.

   (b) Mostrare che $\mathbf{F}$ è conservativo su Ω.

   (c) Calcolare un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω.

   (d) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ per andare dal punto $P\equiv(0,0)$ al punto $Q\equiv(\frac{\sqrt{3}}{5},\frac{\sqrt{6}}{5})$.

4. Sia Σ il cilindro circolare retto che ha per asse l'asse delle z, che ha raggio r e che è compreso tra i due piani di equazione $z=0$ e $z=h$. Calcolare l'integrale di superficie

$$I=\iint_\Sigma \frac{x^2+y^2+z}{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

5. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}=(x^3+x\mathrm{e}^z,y^3+y\mathrm{e}^z,z^3+\mathrm{e}^z)$ attraverso la sfera S di centro $O\equiv(0,0,0)$ e raggio r.

Soluzioni

1. La matrice jacobiana di $G \circ F$ nel punto $\mathbf{x}_0$ è

$$J_{G\circ F}(\mathbf{x}_0) = J_G(F(\mathbf{x}_0))J_F(\mathbf{x}_0)\,.$$

Nel nostro caso, si ha

$$J_F(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{x+y} & \mathrm{e}^{x+y} + \mathrm{e}^{y-z} & -\mathrm{e}^{y-z} \\ \mathrm{e}^{x} & -\mathrm{e}^{y} & \mathrm{e}^{z} \end{bmatrix}$$

e

$$J_G(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x-y & -x \\ y & x-2y \end{bmatrix}.$$

Quindi, essendo $\mathbf{x}_0 = (0,0,0)$ e $F(\mathbf{x}_0) = F(0,0,0) = (2,1)$, si ha

$$J_{G\circ F}(0,0) = J_G(2,1)J_F(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -2 \\ 1 & 8 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Consideriamo la trasformazione lineare che si ottiene ponendo

$$\begin{cases} u = 2x - y \\ v = x - 2y\,. \end{cases}$$

Essa è invertibile e si trova facilmente che la trasformazione inversa T ha equazioni

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}\,u - \frac{1}{3}\,v \\ y = \frac{1}{3}\,u - \frac{2}{3}\,v\,. \end{cases}$$

la matrice jacobiana di questa trasformazione è

$$J = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

e $\det J = -\frac{1}{3}$. Pertanto l'integrale di partenza diventa

$$I = \iint_{\Omega'} uv\,\mathrm{e}^{v^2}\,|\det J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\iint_{\Omega'} uv\,\mathrm{e}^{v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

dove $\Omega' = T^{-1}(\Omega)$. Si vede facilmente che

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 2x-3 \le y \le 2x\,,\; \frac{x}{2} \le y \le \frac{x}{2} + \frac{3}{2}\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; -2x \le -y \le -2x+3\,,\; -x-3 \le -2y \le -x\right\} \\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le 2x-y \le 3\,,\; -3 \le x-2y \le 0\right\}. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\Omega = \left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le u \le 3\,,\; -3 \le v \le 0\right\}$$

e quindi

$$I = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}\int_{0}^{3} uv\,\mathrm{e}^{v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0} u\,\mathrm{d}u \int_{0}^{3} v\,\mathrm{e}^{v^2}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\left[\frac{u^2}{2}\right]_{-3}^{0}\left[\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{v^2}\right]_{0}^{3} = -\frac{3}{4}\,(\mathrm{e}^9 - 1)\,.$$

3. (a) Il campo $\mathbf{F}$ è definito per $1-x^2-y^2>0$, ossia per $x^2+y^2<1$. Quindi Ω è il disco aperto che ha centro in $O\equiv(0,0)$ e che ha raggio 1.

   (b) Poiché
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{xy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\,,$$
il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale su Ω. Poiché Ω è semplicemente, si ha che $\mathbf{F}$ è conservativo su Ω.

   (c) Si vede facilmente che un potenziale di $\mathbf{F}$ su Ω è dato da
$$U(x,y)=-\frac{1}{2}\,\sqrt{1-x^2-y^2}\,.$$

   (d) Il lavoro richiesto è
$$L(P\to Q)=U(Q)-U(P)=U\!\left(\frac{\sqrt{3}}{5},\frac{\sqrt{6}}{5}\right)-U(0,0)=-\frac{1}{2}\,\sqrt{1-\frac{3}{25}-\frac{6}{25}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{10}\,.$$

4. La superficie Σ ha equazioni parametriche
$$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\\ z=t\end{cases}\qquad\begin{array}{l}\theta\in[0,2\pi]\\ t\in[0,h]\end{array}$$
e ha vettore normale $\mathbf{N}=(r\cos\theta,\sin\theta,0)$, con $\|\mathbf{N}\|=r$. Pertanto, si ha
$$\begin{aligned}I &= \int_0^{2\pi}\int_0^h\frac{r^2+t}{r^2+t^2}\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t=2\pi r\int_0^h\frac{r^2+t}{r^2+t^2}\,\mathrm{d}t=2\pi r\int_0^h\left(\frac{r^2}{r^2+t^2}+\frac{1}{2}\,\frac{2t}{r^2+t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &= 2\pi r\left[r\,\mathrm{artg}\,\frac{t}{r}+\frac{1}{2}\,\ln(r^2+t^2)\right]_0^h=\pi r\left(2r\,\mathrm{artg}\,\frac{h}{r}+\ln\!\left(1+\frac{h^2}{r^2}\right)\right).\end{aligned}$$

5. Utilizzando il teorema della divergenza, si ha
$$\Phi=\iiint_\Omega\mathrm{div}\,\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2+\mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
dove Ω è la regione delimitata dalla sfera S. Passando alle coordinate sferiche, si ha
$$\begin{aligned}\Phi &= 3\int_0^r\int_0^\pi\int_0^{2\pi}(\rho^2+\mathrm{e}^{\rho\cos\varphi})\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\\ &= 6\pi\int_0^r\left[\int_0^\pi(\rho^4\sin\varphi+\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{e}^{\rho\cos\varphi})\,\mathrm{d}\varphi\right]\mathrm{d}\rho\\ &= 6\pi\int_0^r\Big[-\rho^4\cos\varphi-\rho\,\mathrm{e}^{\rho\cos\varphi}\Big]_0^\pi\mathrm{d}\rho\\ &= 6\pi\int_0^r(2\rho^4-\rho\,\mathrm{e}^{-\rho}+\rho\,\mathrm{e}^{\rho})\,\mathrm{d}\rho\\ &= 12\pi\int_0^r(\rho^4+\rho\,\sinh\rho)\,\mathrm{d}\rho\\ &= 12\pi\left(\frac{r^5}{5}+r\,\cosh r-\sinh r\right).\end{aligned}$$