Analisi Matematica II
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Autovalutazione #7

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$
   (a) Determinare i massimi e minimi di f.
   (b) Mostrare che f è limitata.
   (c) Scrivere lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di f nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.
2. Calcolare il volume della regione
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2-2y \le 0\,,\ 0 \le z \le x^2+y^2\}.$$
3. Determinare le coordinate del baricentro della superficie Σ di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = (R + r\cos\varphi)\cos\theta \\ y = (R + r\cos\varphi)\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \varphi \in [0, 2\pi] \\ \theta \in [0, \pi/2] \,. \end{array}$$
4. Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Sia γ_1 l'arco di parabola di equazione $y = ax^2$ con $-1 \le x \le 2$, e sia γ_2 il segmento che collega i due estremi di γ_1. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x+y, xy)$ lungo la curva $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, orientata positivamente.
5. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} \equiv (xy, yz, xz)$ attraverso la superficie del rettangolo di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, orientata in modo che la normale sia nel semispazio non contenente l'origine.

Soluzioni

1. (a) Cerchiamo i punti critici di f:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y(1-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1-2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ x(1-2y^2) = 0\,. \end{cases}$$

Pertanto, si hanno i cinque punti critici $O \equiv (0,0)$, $P_{1,2} \equiv \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ e $P_{3,4} \equiv \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$.
La matrice Hessiana di f è

$$H = \begin{bmatrix} -2xy(3-2x^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} & (1-2x^2)(1-2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ (1-2x^2)(1-2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} & -2xy(3-2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{bmatrix}.$$

Per $O \equiv (0,0)$, si ha

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e $\det H(0,0) = -1$. Quindi, O è un punto di sella per f.
Per i punti $P_{1,2} \equiv \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$, si ha

$$H\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & -2\,\mathrm{e}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice Hessiana possiede due autovalori negativi, P_1 e P_2 sono due punti di massimo per f. Il valore assunto da f in tali punti è $\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}$.
Per i punti $P_{1,2} \equiv \left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right)$, si ha

$$H\left(\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 2\,\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Poiché la matrice Hessiana possiede due autovalori positivi, P_3 e P_4 sono due punti di massimo per f. Il valore assunto da f in tali punti è $-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}$.

(b) Passando alle coordinate polari, si ha

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \frac{1}{2}\,\rho^2\mathrm{e}^{-\rho^2}|\sin 2\theta| \leq \frac{1}{2}\,\rho^2\mathrm{e}^{-\rho^2}.$$

Si vede facilmente che la funzione $g(\rho) = \rho^2\mathrm{e}^{-\rho^2}$ è limitata. Più precisamente, si trova che $0 \leq g(\rho) \leq \mathrm{e}^{-1}$ per ogni $\rho \geq 0$. Di conseguenza, si ha

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1} \leq f(x,y) \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-1}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Quindi f è limitata e i punti $P_1, \ldots, P_4$ trovati precedentemente sono punti di estremo assoluti per f.

(c) Lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di f nel punto $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ è

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle + \frac{1}{2}\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_T H(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2)$$

per $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Poiché $f(\mathbf{x}_0) = f(1,1) = \mathrm{e}^{-2}$, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(1,1) = (-\mathrm{e}^{-2}, -\mathrm{e}^{-2})$ e

$$H(\mathbf{x}_0) = H(1,1) = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-2} & \mathrm{e}^{-2} \\ \mathrm{e}^{-2} & -2\,\mathrm{e}^{-2} \end{bmatrix},$$

si ha

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^{-2}(x-1) - \mathrm{e}^{-2}(y-1) + \\ -\mathrm{e}^{-2}(x-2)^2 + \mathrm{e}^{-2}(x-1)(y-1) - \mathrm{e}^{-2}(y-1)^2 + o((x-1)^2 + (y-1)^2)$$

per $(x,y) \to (1,1)$.

2. L'insieme Ω è la regione contenuta nel semispazio $z \geq 0$ delimitata dal cilindro circolare retto di equazione $x^2 + (y-1)^2 = 1$ e dal paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$. Poiché tale regione è z-semplice, essendo

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D = D_1(0,1)\,,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}\,,$$

possiamo integrare per fili:

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \int_0^{x^2+y^2} \mathrm{d}z\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Passando alle coordinate polari centrate nel punto $(0,1)$, ossia alle coordinate $x = \rho\cos\theta$ e $y = 1 + \rho\sin\theta$, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^2\cos^2\theta + (1+\rho\sin\theta)^2)\ \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\rho^3 + \rho + 2\rho^2\sin\theta)\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \big[(\rho^3+\rho)\theta - 2\rho^2\cos\theta\big]_0^{2\pi}\ \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\int_0^1 (\rho^3+\rho)\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi\left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\,\pi\,. \end{aligned}$$

3. Sia T il toro di centro $O \equiv (0,0,0)$ e raggi r e R, e che ha come asse di simmetria l'asse z. La superfice Σ è la porzione di T contenuta nel primo ottante.

Il vettore normale a Σ è

$$\mathbf{N} = (R + r\cos\varphi)(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)$$

e $\|\mathbf{N}\| = r(R + r\cos\varphi)$. Pertanto, l'area di Σ è

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma) &= \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} \|\mathbf{N}(\varphi,\theta)\|\ \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r(R + r\cos\varphi)\ \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= r\int_0^{2\pi} (R + r\cos\varphi)\ \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi r}{2}\Big[R\varphi + r\sin\varphi\Big]_0^{2\pi} = \pi^2 rR\,. \end{aligned}$$

Poiché Σ è simmetrica rispetto al piano di equazione $z = 0$, si ha $z_B = 0$. Analogamente, poiché Σ è simmetrica rispetto al piano di equazione $x - y = 0$, si ha $x_B = y_B$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned}
x_B &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \iint_\Sigma x \, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \iint_{[0,2\pi]\times[0,\pi/2]} x(\varphi,\theta) \, \|\mathbf{N}(\varphi,\theta)\| \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\pi^2 r R} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (R + r\cos\varphi)\cos\theta \, r(R + r\cos\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\pi^2 R} \int_0^{2\pi} (R + r\cos\varphi)^2 \, \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{\pi^2 R} \int_0^{2\pi} (R^2 + 2rR\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi) \, \mathrm{d}\varphi \ \ [\sin\theta]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{\pi^2 R} \left[R^2\varphi + 2rR\sin\varphi + r^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{r^2}{2} \sin\varphi\cos\varphi \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{\pi^2 R} \, (2\pi R^2 + \pi r^2) = \frac{r^2 + 2R^2}{\pi R} \, .
\end{aligned}$$

In conclusione, il baricentro di Σ è

$$B \equiv \left(\frac{r^2 + 2R^2}{\pi R}, \frac{r^2 + 2R^2}{\pi R}, 0 \right) .$$

4. Sia Ω la regione racchiusa dalla curva γ. Poiché Ω è un insieme semplice, possiamo utilizzare il teorema di Gauss-Green nel piano:

$$L = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_\Omega (y-1) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, .$$

Poiché la retta che passa per gli estremi di γ_1 ha equazione $y = ax + 2a$, si ha

$$\Omega = \{(x,y) \ : \ x \in [-1,2] \, , \ ax^2 \le y \le ax + 2a\} \, .$$

Di conseguenza, si ha

$$\begin{aligned}
L &= \int_{-1}^{2} \int_{ax^2}^{ax+2a} (y-1) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left[\frac{1}{2} \, (y-1)^2 \right]_{ax^2}^{ax+2a} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} \left((ax + 2a - 1)^2 - (ax^2 - 1)^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{(ax + 2a - 1)^3}{3a} \right]_{-1}^{2} - \frac{1}{2} \int_{-1}^{2} (a^2x^4 - 2ax^2 + 1) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{6a} \, ((4a-1)^3 - (a-1)^3) - \frac{1}{2} \left[a^2 \frac{x^5}{5} - 2a \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^{2} \\
&= \frac{3a}{6a} \, ((4a-1)^2 + (4a-1)(a-1) + (a-1)^2) - \frac{1}{2} \left(\frac{33}{5} \, a^2 - \frac{18}{3} \, a + 3 \right) \\
&= \frac{1}{2} \, (21a^2 - 15a + 3) - \frac{1}{2} \left(\frac{33}{5} \, a^2 - \frac{18}{3} \, a + 3 \right) \\
&= \frac{9a(8a-5)}{10} \, .
\end{aligned}$$

5. Siano $\mathbf{x}_1 = (1,0,0)$, $\mathbf{x}_2 = (0,1,0)$, $\mathbf{x}_3 = (1,0,1)$, $\mathbf{x}_4 = (0,1,1)$. Posto $\mathbf{a} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (-1,1,0)$ e $\mathbf{b} = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 = (0,0,1)$, il piano che contiene i quattro punti dati ha equazione

vettoriale $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} = (1-u, u, v)$ con $u, v \in \mathbb{R}$. Pertanto, la superficie Σ data dal rettangolo in questione ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - u \\ y = u \\ z = v \end{cases} \qquad\qquad u, v \in [0,1]$$

ed è orientata secondo il vettore normale $\mathbf{N} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (1,1,0)$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi &= \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\
&= \int_0^1 \int_0^1 (x+z)y \; \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_0^1 \int_0^1 (1-u+v)u \; \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 u \left[\int_0^1 (1-u+v) \, \mathrm{d}v \right] \mathrm{d}u = \int_0^1 u \left[(1-u)v + \frac{v^2}{2} \right]_0^1 \mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}\, u - u^2 \right) \mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2}\, \frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{12}\,.
\end{aligned}$$