Autovalutazione #8

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$
   (a) Stabilire se f è continua in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.
   (b) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.
   (c) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = (7x + y)\,\mathbf{e}^{xy}$$
e sia γ la curva di equazione $x^4 + 3xy^3 - y^3 + x^2 - 4xy + y - 1 = 0$.
   (a) Mostrare che γ è regolare nel punto $P \equiv (1,1)$.
   (b) Scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente a γ nel punto $P \equiv (1,1)$.
   (c) Mostrare che f possiede un punto critico vincolato a γ in $P \equiv (1,1)$.

3. Calcolare l'integrale
$$I = \iint_\Omega \left(\frac{x+y}{x}\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
dove Ω è la regione piana delimitata dalle iperboli di equazione $xy = 1$ e $xy = 9$ e dalle rette di equazione $y = x$ e $y = 4x$.

4. Sia γ la curva di equazioni cartesiane
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{b} = 1 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}\,,\ a, b > 0\,.$$
   (a) Riconoscere la curva γ e orientarla positivamente rispetto all'asse z.
   (b) Determinare una parametrizzazione di γ.
   (c) Utilizzando la definizione, calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_\gamma (y - z)\,\mathrm{d}x + (z - x)\,\mathrm{d}y + (x - y)\,\mathrm{d}z$$
   dove γ è orientata positivamente rispetto all'asse z.
   (d) Calcolare I utilizzando il teorema di Stokes.

5. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (xz, 2x - y, 2z - x)$ attraverso la superficie Σ, orientata verso l'esterno, data dalla porzione del cilindro circolare retto di equazione $x^2 + z^2 = r^2$ contenuto nel semispazio definito dalle condizioni $0 \le y \le h$ e $z \ge 0$.

Soluzioni

1. (a) La funzione f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$ se

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0\,.$$

Passando in coordinate polari, si ha

$$|F(\rho,\theta)| = |f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)| = \left|\frac{\rho^2\cos^2\theta - \rho^2\sin^2\theta}{\rho}\right| = \rho\,|\cos 2\theta| \le \rho \to 0$$

per $\rho \to 0^+$. Quindi $F(\rho,\theta) \to 0$ per $\rho \to 0^+$, uniformemente rispetto a θ. Pertanto $f(\mathbf{x}) \to 0$ per $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$, ossia f è continua in $\mathbf{0}$.

(b) Poiché il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\frac{x^2}{|x|} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0} \operatorname{sign}(x)$$

non esiste (valendo 1 per $x \to 0^+$ e -1 per $x \to 0^-$), non esiste nemmeno la derivata parziale prima di f rispetto a x in $(0,0)$. Di conseguenza, f non è derivabile in $(0,0)$.

(c) Non essendo derivabile $(0,0)$, la funzione f non è nemmeno differenziabile in $(0,0)$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = (7x + y)\,\mathbf{e}^{xy}$$

e sia γ la curva di equazione

(a) Sia g la funzione definita da $g(x,y) = x^4 + 3xy^3 - y^3 + x^2 - 4xy + y - 1 = 0$. Poiché $g(1,1) = 0$, si ha che il punto P appartiene alla curva γ. Essendo un polinomio, g è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi anche in P. Inoltre, si ha

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 4x^3 + 3y^3 + 2x - 4y$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 9xy^2 - 3y^2 - 4x + 1$$

e quindi $\nabla g(1,1) = (5,3) \ne 0$. Pertanto, la curva γ è regolare in $P \equiv (1,1)$.

(b) L'equazione cartesiana della retta tangente a γ in $P \equiv (1,1)$ è

$$\langle \nabla g(1,1), (x-1, y-1)\rangle = 0$$

ossia $5(x-1) + 3(y-1) = 0$, ossia $5x + 3y - 8 = 0$.

(c) Poiché

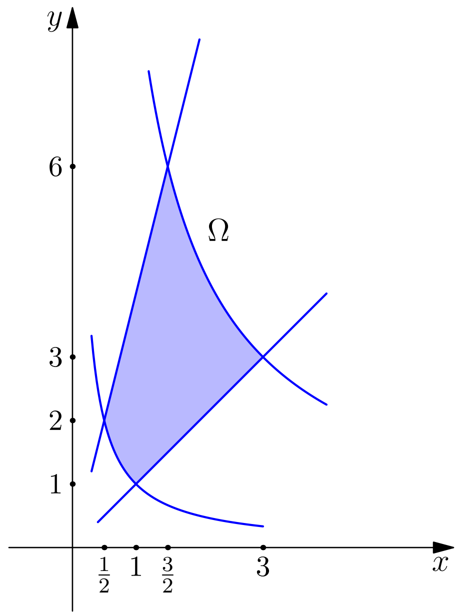
$$\frac{\partial f}{\partial x} = (7 + 7xy + y^2)\,\mathbf{e}^{xy}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (1 + 7x^2 + xy)\,\mathbf{e}^{xy}$$

si ha

$$\nabla f(1,1) = (15\mathbf{e}, 9\mathbf{e}) = 3\mathbf{e}\,(5,3) = 3\mathbf{e}\,\nabla g(1,1)\,,$$

ossia $\nabla f(1,1)$ e $\nabla g(1,1)$ sono due vettori paralleli. Questo significa che f possiede un punto critico vincolato a γ in $P \equiv (1,1)$.

3. Iniziamo ad osservare che l'insieme Ω è contenuto nel primo quadrante (bordo escluso), ossia $\Omega \subseteq (0,+\infty) \times (0,+\infty)$:



Possiamo quindi considerare la trasformazione

$$T : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to (0,+\infty) \times (0,+\infty)$$

che ha per equazioni

$$\begin{cases} u = \sqrt{y/x} \\ v = \sqrt{xy}\,. \end{cases}$$

Tale trasformazione, oltre ad essere ben definita e di classe $\mathcal{C}^1$, è invertibile. Infatti, moltiplicando le due equazioni tra di loro, si ha $uv = y$, mentre prendendone il quoziente si ha $v/u = x$. Pertanto, l'inversa è data dalla trasformazione

$$T^{-1} : (0,+\infty) \times (0,+\infty) \to (0,+\infty) \times (0,+\infty)$$

di equazioni

$$\begin{cases} x = v/u \\ y = uv\,. \end{cases}$$

Possiamo così utilizzare questa trasformazione per calcolare l'integrale dato:

$$I = \iint_{T(\Omega)} ((1+u^2)\,u + v)\,|\det J_{T^{-1}}|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

La matrice jacobiana della trasformazione T^{-1} è

$$J_{T^{-1}} = \begin{bmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_u y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ v & u \end{bmatrix}\,.$$

Pertanto, il determinate jacobiano è

$$\det J_{T^{-1}} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ v & u \end{vmatrix} = -\frac{v}{u} - \frac{v}{u} = -\frac{2v}{u}\,.$$

Inoltre, poiché

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(x,y) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty) \,:\, x \le y \le 4x\,,\ 1 \le xy \le 9\} \\ &= \{(x,y) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty) \,:\, 1 \le \sqrt{y/x} \le 2\,,\ 1 \le \sqrt{xy} \le 3\}\,,\end{aligned}$$

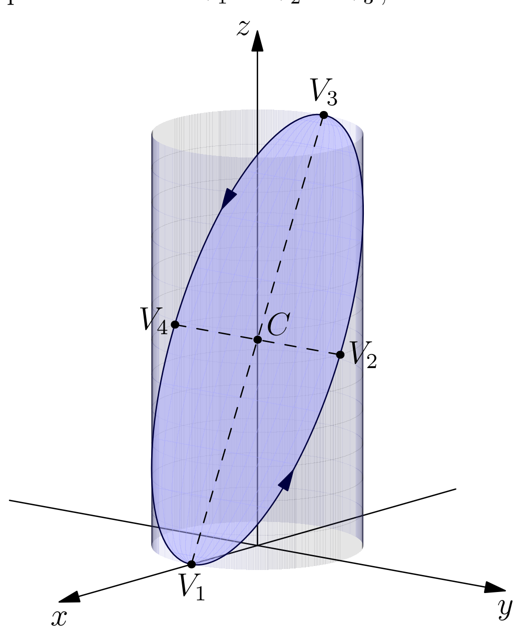
si ha

$$T(\Omega) = \{(u,v) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty) \,:\, 1 \le u \le 2\,,\ 1 \le v \le 3\} = [1,2]\times[1,3]\,.$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 \int_1^3 ((1+u^2)\,u + v)\,\frac{2v}{u}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= 2\int_1^2 \left[\int_1^3 \left((1+u^2)\,v + \frac{v^2}{u}\right)\mathrm{d}v\right]\mathrm{d}u \\ &= 2\int_1^2 \left[(1+u^2)\frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3u}\right]_1^3 \mathrm{d}u \\ &= 2\int_1^2 \left(4(1+u^2) + \frac{26}{3u}\right)\mathrm{d}u \\ &= 2\left[4u + \frac{4}{3}\,u^3 + \frac{26}{3}\ln u\right]_1^2 \\ &= \frac{80}{3} + \frac{52}{3}\,\ln 2\,. \end{aligned}$$

4. (a) La curva γ è l'intersezione del cilindro circolare retto di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ con il piano di equazione $x/a + z/b = 1$. Quindi, γ è un'ellisse. In particolare, per la simmetria della configurazione, gli assi di simmetria di γ sono le rette che congiungono i punti di intersezione di γ con il piano $y = 0$ e con il piano $x = 0$. Tali punti sono $V_1 \equiv (a,0,0)$, $V_2 \equiv (0,a,b)$, $V_3 \equiv (-a,0,2b)$ e $V_4 \equiv (0,-a,b)$. Pertanto gli assi di γ sono le rette V_1V_3 e V_2V_4. Inoltre, il centro di γ giace sull'asse z ed è dato dal punto $C \equiv (0,0,b)$. Pertanto, i semiassi di γ sono $\mathrm{d}(C,V_1) = \sqrt{a^2+b^2}$ e $\mathrm{d}(C,V_2) = a$. Infine, l'orientazione richiesta di γ è quella per cui si va da V_1 a V_2 a V_3, come si vede nella figura seguente



(b) Poiché il generico punto $P \equiv (x, y, z)$ di γ deve appartenere al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = a^2$, poniamo $x = a\cos\theta$ e $y = a\sin\theta$. Poiché P deve appartenere anche al piano di equazione $x/a + z/b = 1$, si deve avere $\cos\theta + z/b = 1$, ossia $z = b - b\cos\theta$. Pertanto, si ha

$$\gamma : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b - b\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] .$$

Si osservi che l'orientazione indotta da questa parametrizzazione coincide con quella richiesta nel punto precedente. Infatti, per $\theta = 0$ si ha il punto $V_1 \equiv (a, 0, 0)$, per $\theta = \pi/2$ si ha il punto $V_2 \equiv (0, a, b)$ e per $\theta = \pi$ si ha il punto $V_3 \equiv (-a, 0, 2b)$.

(c) Utilizzando la definizione di integrale di linea e la parametrizzazione di γ trovata nel punto precedente, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [(a\sin\theta - b + b\cos\theta)(-a\sin\theta) + \\ &\qquad +(b - b\cos\theta - a\cos\theta)a\cos\theta + (a\cos\theta - a\sin\theta)b\sin\theta]\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2\sin^2\theta + ab\sin\theta - ab\sin\theta\cos\theta + \\ &\qquad +ab\cos\theta - ab\cos^2\theta - a^2\cos^2\theta + ab\sin\theta\cos\theta - ab\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 - ab + ab\sin\theta + ab\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[-(a^2 + ab)\theta - ab\cos\theta + ab\sin\theta \Big]_0^{2\pi} \\ &= -2\pi a(a + b) . \end{aligned}$$

(d) Sia Σ la superficie che giace sul piano di equazione $x/a + z/b = 1$ e delimitata da γ, orientata scegliendo il vettore normale $\mathbf{N} = (1/a, 0, 1/b)$, in modo che l'orientazione coerente di γ sia quella richiesta. In particolare, il versore normale associato è

$$\mathbf{n} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{1}{a}, 0, \frac{1}{b} \right) .$$

Posto $\mathbf{F} = (y - z, z - x, x - y)$, si ha $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (-2, -2, -2)$. Quindi, per il teorema di Stokes, si ha

$$I = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = -\frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = -\frac{2(a + b)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathcal{A}(\Sigma) .$$

Poiché $\mathcal{A}(\Sigma) = \pi a\sqrt{a^2 + b^2}$, si ha $I = -2\pi a(a + b)$.

5. La superficie Σ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = t \\ z = r\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t \in [0, h] \\ \theta \in [0, \pi] . \end{array}$$

Pertanto, il vettore normale a Σ è

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial t} \wedge \frac{\partial f}{\partial \theta} = (r\cos\theta, 0, r\sin\theta)$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{[0,h]\times[0,\pi]} \langle \mathbf{F}(t,\theta), \mathbf{N}(t,\theta) \rangle \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^h \int_0^\pi (r\cos\theta \, r\sin\theta \, r\cos\theta + (2r\sin\theta - r\cos\theta) r\sin\theta) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^h \mathrm{d}t \int_0^\pi (r^3 \sin\theta\cos^2\theta + 2r^2\sin^2\theta - r^2\sin\theta\cos\theta) \, \mathrm{d}\theta \\
&= h\left[-r^3\frac{\cos^3\theta}{3} + r^2\theta - r^2\sin\theta\cos\theta + \frac{r^2}{4}\cos 2\theta\right]_0^\pi \\
&= \frac{3\pi + 2r}{3} \, hr^2 \, .
\end{aligned}
$$