Analisi Matematica II
Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Autovalutazione #9

1. Stabilire se esiste il limite
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{e^{x^2+y^2} - 1 - xy}{x^2+y^2} \,.$$

2. Determinare i valori del parametro reale h per i quali è positivo il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x^2+y^2, yz, z)$ lungo l'arco di elica cilindrica
$$\gamma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \,.$$

3. Sia S la sfera con centro nell'origine e raggio r, orientata verso l'esterno. Sia Σ la porzione di S contenuta nel primo ottante. Sia Ω la regione delimitata dalla superficie Σ e dai piani coordinati.
   (a) Determinare il baricentro di Ω.
   (b) Determinare il baricentro di Σ.
   (c) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (x, y, z)$ attraverso Σ.
   (d) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{G} = (z, x, y)$ lungo il bordo di Σ, orientato coerentemente con Σ.

4. Sia Σ la superficie di equazioni parametriche
$$\begin{cases} x = \sin\varphi\,\cos\theta \\ y = \sin\varphi\,\sin\theta \\ z = \sin^2\varphi\,\cos 2\theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \varphi \in [0, \pi/2] \\ \theta \in [0, 2\pi] \,. \end{array}$$
   (a) Calcolare il vettore normale $\mathbf{N}$.
   (b) Determinare gli eventuali punti singolari della parametrizzazione.
   (c) Mostrare che Σ è una superficie semplice.
   (d) Calcolare l'area di Σ.

5. Dato il vettore $\mathbf{a} = (a, b, c) \neq \mathbf{0}$, calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x}$ lungo una qualunque circonferenza γ di raggio r giacente sul piano $\pi : ax + by + cz + 1 = 0$, specificando l'orientazione scelta.

Soluzioni

1. Valutiamo la funzione
$$f(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2} - 1 - xy}{x^2+y^2}$$
sulla generica retta passante per l'origine, di equazione $y = mx$. Per $x \to 0$, si ha
$$\begin{aligned} f(x,mx) &= \frac{e^{x^2+m^2x^2} - 1 - mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{e^{(1+m^2)x^2} - 1 - mx^2}{(1+m^2)x^2} \\ &\sim \frac{1 + (1+m^2)x^2 + o(x^2) - 1 - mx^2}{(1+m^2)x^2} \\ &= \frac{(1-m+m^2)x^2 + o(x^2)}{(1+m^2)x^2} = \frac{1-m+m^2+o(1)}{1+m^2} \to \frac{1-m+m^2}{1+m^2}\,. \end{aligned}$$
Poiché il risultato dipende da m, ossia dalla retta lungo la quale ci si muove, il limite dato non esiste.

2. Sia f la funzione vettoriale che dà la parametrizzazione di γ. Allora, il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ è
$$L = \int_\gamma \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s}\rangle = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\theta), f'(\theta)\rangle\,\mathrm{d}\theta$$
dove $\mathbf{F}(\theta) = \mathbf{F}(r\cos\theta, r\sin\theta, h\theta) = (r^2, rh\theta\sin\theta, h\theta)$ e $f'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, h)$, Quindi, si ha
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} (-r^3\sin\theta + r^2h\theta\sin\theta\cos\theta + h^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \left[r^3\cos\theta - r^2h\frac{\theta}{4}\cos 2\theta + \frac{r^2h}{8}\sin 2\theta + h^2\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi h}{2}\,(4\pi h - r^2)\,. \end{aligned}$$
Pertanto, $L > 0$ se e solo se $h > \frac{r^2}{4\pi}$.

3. (a) Il volume di Ω è
$$\mathcal{V}(\Omega) = \frac{1}{8}\,\mathcal{V}(D_r(O)) = \frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi r^3}{6}\,.$$
Poiché la regione Ω è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo ottante, si ha $x_B = y_B = z_B$. Inoltre, si ha
$$\begin{aligned} z_B &= \frac{1}{\mathcal{V}(\Omega)}\iint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{6}{\pi r^3}\int_0^r\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\rho\cos\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{6}{\pi r^3}\,\frac{\pi}{2}\int_0^r \rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{3}{r^3}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^r\left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi\right]_0^{\pi/2} = \frac{3r}{8}\,. \end{aligned}$$
Pertanto il baricentro di Ω è $B \equiv \left(\frac{3r}{8}, \frac{3r}{8}, \frac{3r}{8}\right)$.

(b) L'area di Σ è
$$\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{1}{8}\,\mathcal{A}(S) = \frac{1}{8}\,4\pi r^2 = \frac{\pi r^2}{2}\,.$$

Poiché Σ è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo ottante, si ha $x_B = y_B = z_B$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} z_B &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Sigma)} \iint_\Sigma z \,\mathrm{d}\sigma = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} z(\varphi,\theta) \, \|\mathbf{N}(\varphi,\theta)\| \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{2}{\pi r^2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r\cos\varphi \, r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi r^2} \frac{\pi r^3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi \\ &= r \left[-\frac{1}{4}\cos 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{r}{4}. \end{aligned}$$

Pertanto il baricentro di Σ è $B \equiv \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, \frac{r}{2}\right)$.

(c) Poiché la regione Ω è semplice, per il teorema della divergenza, il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ è

$$\Phi = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3 \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\mathcal{V}(\Omega) = \frac{3}{8}\,\frac{4}{3}\,\pi r^3 = \frac{1}{2}\,\pi r^3 .$$

(d) Per il teorema di Stokes, il lavoro richiesto è

$$L = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta ,$$

dove $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (1,1,1)$, $\mathbf{N} = r\sin\varphi\,(x,y,z)_\Sigma$ e $\langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle = r\sin\varphi\,(x+y+z)_\Sigma$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} r\sin\varphi\,(r\sin\varphi\cos\theta + r\sin\varphi\sin\theta + r\cos\varphi) \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} (\sin^2\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi) \,\mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\varphi \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \Big[\sin^2\varphi\sin\theta - \sin^2\varphi\cos\theta + \theta\sin\varphi\cos\varphi \Big]_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2\varphi + \frac{\pi}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi \right) \mathrm{d}\varphi \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \left(2\sin^2\varphi + \frac{\pi}{4}\sin 2\varphi \right) \mathrm{d}\varphi \\ &= r^2 \left[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \frac{\pi}{8}\cos 2\varphi \right]_0^{\pi/2} \\ &= r^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4}\,\pi r^2 . \end{aligned}$$

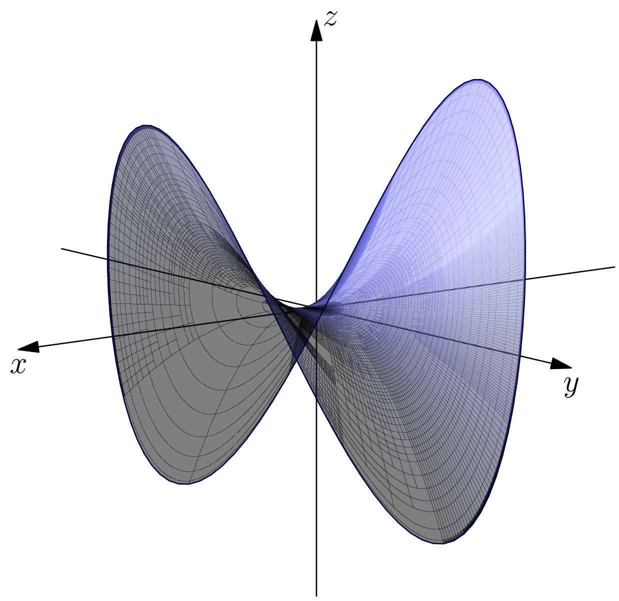
4. (a) Sia $f : [0,\pi/2]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che dà la parametrizzazione della superficie Σ. Allora, il vettore normale a Σ è

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial f}{\partial \theta} = \sin\varphi\cos\varphi \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\sin\varphi\cos 2\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & -2\sin\varphi\sin 2\theta \end{vmatrix}$$

ossia

$$\mathbf{N} = \sin\varphi\cos\varphi\,(-2\sin\varphi\cos\theta, 2\sin\varphi\sin\theta, 1) .$$

(b) Si ha $||\mathbf{N}|| = \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{4\sin^2\varphi + 1}$ (essendo $\varphi \in [0,\pi/2]$) e $||\mathbf{N}|| = 0$ se e solo se $\sin\varphi\cos\varphi = 0$, ossia se e solo se $\varphi = 0, \pi/2$. Quindi, si ha un punto singolare in $O \equiv (0,0,0)$, per $\varphi = 0$, e nei punti $(\cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta)$ del bordo di Σ, per $\varphi = \pi/2$.



(c) La superficie Σ è semplice. Infatti, supponiamo che $f(\varphi_1, \theta_1) = f(\varphi_2, \theta_2)$, ossia

$$\begin{cases} \sin\varphi_1 \cos\theta_1 = \sin\varphi_2 \cos\theta_2 \\ \sin\varphi_1 \sin\theta_1 = \sin\varphi_2 \sin\theta_2 \\ \sin^2\varphi_1 \cos 2\theta_1 = \sin^2\varphi_2 \cos 2\theta_2 \,. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ha

$$\sin^2\varphi_1 \cos^2\theta_1 + \sin^2\varphi_1 \sin^2\theta_1 = \sin^2\varphi_2 \cos^2\theta_2 + \sin^2\varphi_2 \sin^2\theta_2 \,,$$

ossia $\sin^2\varphi_1 = \sin^2\varphi_2$. Poiché l'angolo φ varia solo tra 0 e $\pi/2$, si deve avere $\varphi_1 = \varphi_2$. Di conseguenza, $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ e $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ e questo è possibile solo per $\theta_1 = \theta_2$.

(d) Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \|\mathbf{N}\| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi \sqrt{4\sin^2\varphi + 1}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{8}\, \frac{(4\sin^2\varphi + 1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}\,(5\sqrt{5} - 1) \,. \end{aligned}$$

5. Sa Σ la superficie data dal disco che giace sul piano π e che ha γ come bordo. Orientiamo Σ, e quindi orientiamo coerentemente γ, scegliendo come versore normale $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$. Poiché

$$\mathbf{F} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = (bz - cy, -az + cx, ay - bx) \,,$$

si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ bz - cy & -az + cx & ay - bx \end{vmatrix} = (2a, 2b, 2c) = 2\mathbf{a} \,.$$

Quindi, applicando il teorema di Stokes, si ha

$$L = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot}\mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Sigma \langle 2\mathbf{a}, \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = 2\|\mathbf{a}\| \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = 2\|\mathbf{a}\| \mathcal{A}(\Sigma) \,.$$

Poiché $\mathcal{A}(\Sigma) = \pi r^2$, si ha $L = 2\|\mathbf{a}\|\pi r^2$.