Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II **Primo compito in itinere – 8 Maggio 2015**

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________
Nome: ____________________

Es.1: 7 punti	**Es.2**: 7 punti	**Es.3**: 13 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

1. Si consideri la serie
$$S = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}\,.$$
   (a) Stabilire se S converge assolutamente.
   (b) Stabilire se S converge (semplicemente).

2. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 6y' + 5y = 5x^2 - 2x - 10\,.$$

3. Si consideri la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = t + \mathrm{e}^{t^2} \\ y = t - \mathrm{e}^{t^2} \\ z = 1 + \mathrm{e}^{-t^2} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$
e il punto P di γ che si ottiene per $t = 0$.
   (a) Determinare i versori della terna intrinseca alla curva γ nel punto P.
   (b) Determinare l'equazione del piano osculatore a γ nel punto P.
   (c) Determinare il raggio di curvatura e il centro di curvatura di γ nel punto P.
   (d) Scrivere le equazioni cartesiane della circonferenza osculatrice a γ nel punto P.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica dispari definita sull'intervallo $[0, \pi]$ da
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} & \text{per } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi\,. \end{cases}$$
   (a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
   (b) Stabilire se la serie di Fourier di f converge in media quadratica.
   (c) Stabilire se la serie di Fourier di f converge puntualmente.
   (d) Calcolare il coefficiente di Fourier b_3 di f.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *Un'ora e trenta minuti.*

Soluzioni

1. Si tratta di una serie a segni alterni $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ dove $a_n = \frac{n^2}{n^3+1}$.

   (a) Poiché, per $n \to +\infty$, si ha
   $$a_n = \frac{n^2}{n^3+1} \sim \frac{1}{n}$$
   la serie S non converge assolutamente.

   (b) Si ha $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Consideriamo ora la funzione f definita da
   $$f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}.$$
   Allora, si ha
   $$f'(x) = -\frac{x(x^3-2)}{(x^3+1)^2} \leq 0 \qquad \text{per ogni } x \geq 2.$$
   Pertanto, la successione a_n è definitivamente decrescente. In conclusione, per il criterio di Leibniz, la serie S converge (semplicemente).

2. Per il teorema di struttura, l'integrale generale dell'equazione differenziale data è $y(x) = \widetilde{y}(x) + \overline{y}(x)$, dove $\widetilde{y}(x)$ è l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e $\overline{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione completa.

   Iniziamo a risolvere l'equazione omogenea $y'' - 6y' + 5y = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$ e ha come soluzioni $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 5$. Pertanto, si ha
   $$\widetilde{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

   Per determinare una soluzione particolare dell'equazione completa, utilizziamo il metodo di somiglianza e cerchiamo una soluzione della della forma $y(x) = Ax^2 + Bx + C$. Sostituendo nell'equazione di partenza
   $$y(x) = Ax^2 + Bx + C, \qquad y'(x) = 2Ax + B, \qquad y''(x) = 2A,$$
   si ha
   $$2A - 6(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 5x^2 - 2x - 10$$
   ossia
   $$5Ax^2 - (12A - 5B)x + 2A - 6B + 5C = 5x^2 - 2x - 10.$$
   Questa identità è equivalente al sistema lineare
   $$\begin{cases} 5A = 5 \\ 12A - 5B = 2 \\ 2A - 6B + 5C = -10 \end{cases}$$
   che ha come soluzione $A = 1$, $B = 2$ e $C = 0$. Pertanto, si ha
   $$\overline{y}(x) = x^2 + 2x.$$

   In conclusione, l'integrale generale cercato è
   $$\widetilde{y}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{5x} + x^2 + 2x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Si ha
   $$\begin{cases} x = t + e^{t^2} \\ y = t - e^{t^2} \\ z = 1 + e^{-t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = 1 + 2te^{t^2} \\ y' = 1 - 2te^{t^2} \\ z' = -2te^{-t^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'' = 2e^{t^2} + 4t^2 e^{t^2} \\ y'' = -2e^{t^2} - 4t^2 e^{t^2} \\ z'' = -2e^{-t^2} + 4t^2 e^{-t^2}. \end{cases}$$

Quindi, si ha

$$f(0) = (1, -1, 2)\,, \qquad f'(0) = (1, 1, 0)\,, \qquad f''(0) = (2, -2, -2)\,.$$

Inoltre, si ha

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = (-2, 2, -4) = 2(-1, 1, -2)$$

e

$$\|f'(0) \wedge f''(0)\| = 2\sqrt{6}\,.$$

Pertanto, i versori della terna intrinseca alla curva γ nel punto P sono

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, 1, 0) \\ \mathbf{b}(0) &= \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,(-1, 1, -2) \\ \mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1, -1, -1)\,. \end{aligned}$$

(b) Il piano osculatore a γ nel punto P è il piano π passante per P e ortogonale al versore binormale $\mathbf{b}(0)$. Quindi $\pi : \langle \mathbf{b}, X - P \rangle = 0$, ossia $\pi : x - y + 2z - 6 = 0$.

(c) La curvatura di γ nel punto P è

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}\,.$$

Quindi il raggio di curvatura e il centro di curvatura di γ nel punto P sono

$$\rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

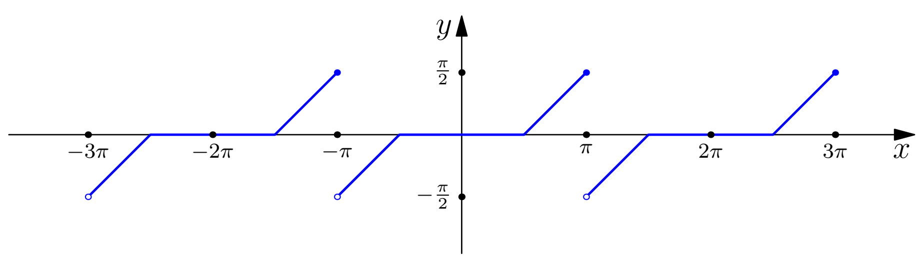
e

$$C(0) = P + \rho(0)\mathbf{n}(0) = (1, -1, 2) + \frac{1}{3}\,(1, -1, -1) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

(d) La circonferenza osculatrice a γ nel punto P è la circonferenza Γ che si ottiene intersecando la sfera che ha centro $C(0)$ e raggio $\rho(0)$ con il piano osculatore a γ in P. Quindi, si ha

$$\Gamma : \begin{cases} (x - \frac{4}{3})^2 + (y + \frac{4}{3})^2 + (z - \frac{5}{3})^2 = \frac{1}{3} \\ x - y + 2z - 6 = 0\,. \end{cases}$$

4. (a) Il grafico di f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$ è



(b) Poiché $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx < +\infty$, la serie di Fourier di f converge in media quadratica.

(c) Poiché f è regolare a tratti, la serie di Fourier di f converge puntualmente su tutto $\mathbb{R}$.

(d) Si ha

$$b_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin 3x \,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin 3x \,\mathrm{d}x\,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\cos 3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos 3x \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

ossia

$$b_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{9\pi}\,.$$