Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II **Secondo compito in itinere – 10 Luglio 2015**

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________
Nome: ______________________

Es.1: 14 punti	**Es.2**: 12 punti	**Es.3**: 7 punti	**Totale**

1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} .$$
   (a) Determinare i punti critici di f.
   (b) Determinare i punti di massimo o di minimo di f.
   (c) Mostrare che la curva $\gamma \;:\; x^5 + xy^4 - 4x^3 + 2xy - 2x + 2 = 0$ é regolare nel punto $P_0 \equiv (1,1)$.
   (d) Stabilire se f possiede un punto critico vincolato alla curva γ in P_0.

2. (a) Disegnare l'insieme
$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \le x \le 1\,,\; x^2 \le y \le \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right\}.$$
   (b) Stabilire se Ω è un insieme y-semplice.
   (c) Stabilire se Ω è un insieme x-semplice.
   (d) Determinare il baricentro di Ω.
   (e) Calcolare il lavoro del campo vettoriale $\mathbf{F} = (3x^2 + xy - 3y, x^2 + 5y^2 + xy - 2x)$ lungo il bordo di Ω orientato positivamente.

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x^3z^2, y^3z^2, (x^2+y^2)z^3)$ attraverso la superficie Σ data dal bordo della regione
$$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x^2 + y^2 \le 1\,,\; 0 \le z \le x^2 + y^2\,,\; x, y \ge 0 \},$$
dove Σ è orientata positivamente.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *1 ora e 45 minuti.*

Soluzioni

1. (a) Si ha

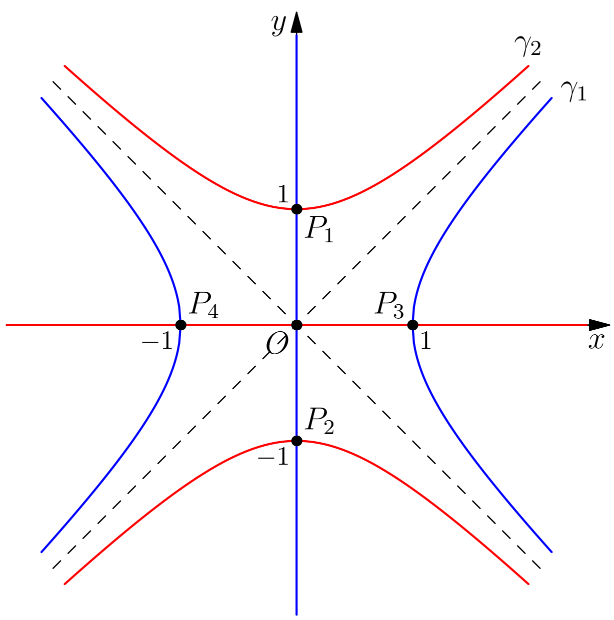
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x(1-x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y(1+x^2-y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x\,(1-x^2+y^2) = 0 \\ y\,(1+x^2-y^2) = 0\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ha $x = 0$ oppure $x^2 = 1 + y^2$. Se $x = 0$, allora la seconda equazione diventa $y\,(1-y^2) = 0$, da cui si ha $y = 0, \pm 1$. Se invece $x^2 = 1 + y^2$, allora la seconda equazione diventa $2y = 0$, da cui si ha $y = 0$ e quindi $x = \pm 1$. In conclusione, i punti critici di f sono i punti $O \equiv (0,0)$, $P_{1,2} \equiv (0, \pm 1)$, $P_{3,4} \equiv (\pm 1, 0)$.

Osservazione. I punti critici di f possono anche essere determinati graficamente. Infatti, il sistema

$$\begin{cases} x\,(1-x^2+y^2) = 0 \\ y\,(1+x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

può essere interpretato come l'intersezione della curva $\gamma_1 \;:\; x\,(1-x^2+y^2) = 0$ con la curva $\gamma_2 \;:\; y\,(1+x^2-y^2) = 0$. La curva γ_1 si spezza nella retta data dall'asse y, di equazione $x = 0$, e nell'iperbole equilatera di equazione $x^2 - y^2 = 1$. La curva γ_2 si spezza nella retta data dall'asse x, di equazione $y = 0$, e nell'iperbole equilatera di equazione $y^2 - x^2 = 1$. Come si vede nella figura seguente



le due curve γ_1 e γ_2 si intersecano esattamente nei punti $O \equiv (0,0)$, $P_{1,2} \equiv (0, \pm 1)$, $P_{3,4} \equiv (\pm 1, 0)$.

(b) Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4xy(x^2-y^2)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(-1-x^2+5y^2+2x^2y^2-2y^4)\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{cases}$$

Pertanto, la matrice Hessiana di f è

$$H(x,y) = 2\mathrm{e}^{-x^2-y^2} \begin{bmatrix} 1-5x^2+y^2+2x^4-2x^2y^2 & 2xy(x^2-y^2) \\ 2xy(x^2-y^2) & -1-x^2+5y^2+2x^2y^2-2y^4 \end{bmatrix}.$$

Per il punto $O \equiv (0,0)$, si ha

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Poiché $H(0,0)$ possiede un autovalore positivo e un autovalore negativo, la forma quadratica associata è semidefinita e quindi O è un punto di sella.
Per i punti $P_{1,2} \equiv (0,\pm 1)$, si ha

$$H(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} 4\,\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & 4\,\mathrm{e}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Poiché $H(0,\pm 1)$ possiede due autovalori positivi, la forma quadratica associata è definita positiva e quindi $P_{1,2}$ sono punti di minimo. In particolare, si ha $f(0,\pm 1) = -\mathrm{e}^{-1}$.
Per i punti $P_{3,4} \equiv (\pm 1, 0)$, si ha

$$H(\pm 1,0) = \begin{bmatrix} -4\,\mathrm{e}^{-1} & 0 \\ 0 & -4\,\mathrm{e}^{-1} \end{bmatrix}.$$

Poiché $H(\pm 1,0)$ possiede due autovalori negativi, la forma quadratica associata è definita negativa e quindi $P_{3,4}$ sono punti di massimo. In particolare, si ha $f(\pm 1, 0) = \mathrm{e}^{-1}$.

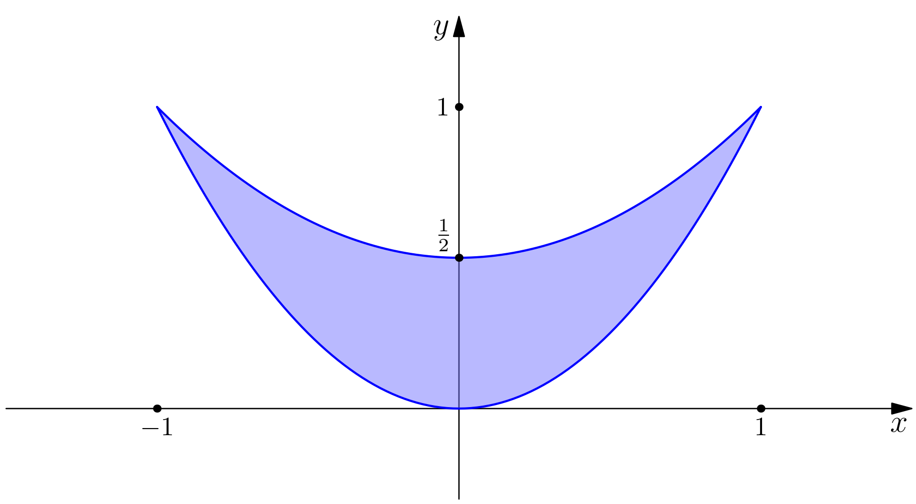
(c) Sia $g(x,y) = x^5 + xy^4 - 4x^3 + 2xy - 2x + 2$. Essendo un polinomio, g è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Inoltre, si ha $g(1,1) = 0$, ossia $P_0 \in \gamma$, e

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 5x^4 + y^4 - 12x^2 + 2y - 2 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 4xy^3 + 2x \end{cases}$$

da cui $\nabla g(1,1) = (-6,6) \neq \mathbf{0}$. Pertanto, la curva γ é regolare nel punto $P_0 \equiv (1,1)$.

(d) La funzione f possiede un punto critico vincolato alla curva γ in P_0 se $\nabla f(1,1)$ e $\nabla g(1,1)$ sono paralleli, ossia se esiste uno scalare λ tale che $\nabla f(1,1) = \nabla g(1,1)$. Poiché $\nabla f(1,1) = (2\mathrm{e}^{-2}, -2\mathrm{e}^{-2}) = 2\mathrm{e}^{-2}(1,-1)$ e $\nabla g(1,1) = (-6,6) = -6(1,-1)$, basta scegliere λ in modo che $2\mathrm{e}^{-2} = -6\lambda$, ossia $\lambda = -\frac{1}{3\mathrm{e}^2}$. Quindi, f possiede un punto critico vincolato a γ in P_0.

2. (a) L'insieme Ω è



(b) Per come è definito, si vede subito che Ω è un insieme y-semplice.

(c) Poiché tagliando Ω con una retta orizzontale di equazione $y = k$, con $1/2 < k \leq 1$, non si ottiene un singolo segmento, Ω non è un insieme x-semplice.

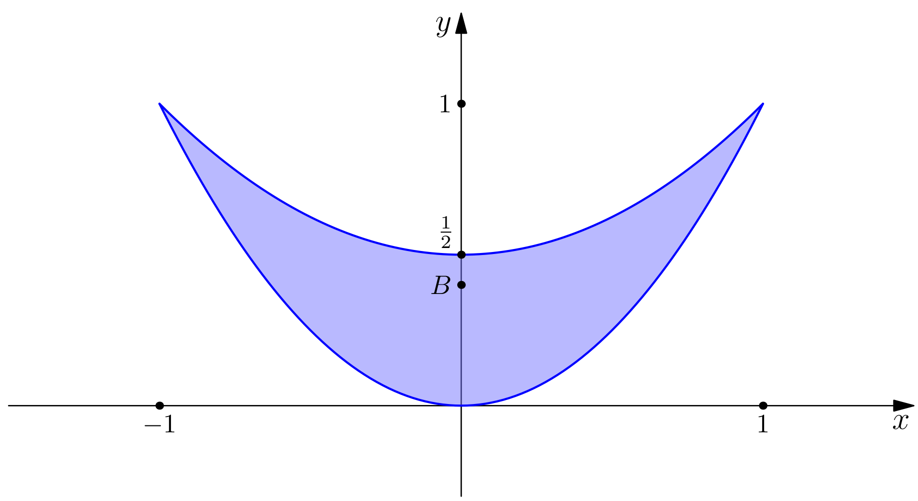
(d) l'area di Ω è

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\Omega) &= \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \big[\, y \,\big]_{x^2}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} - x^2\right) \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}\,.
\end{aligned}$$

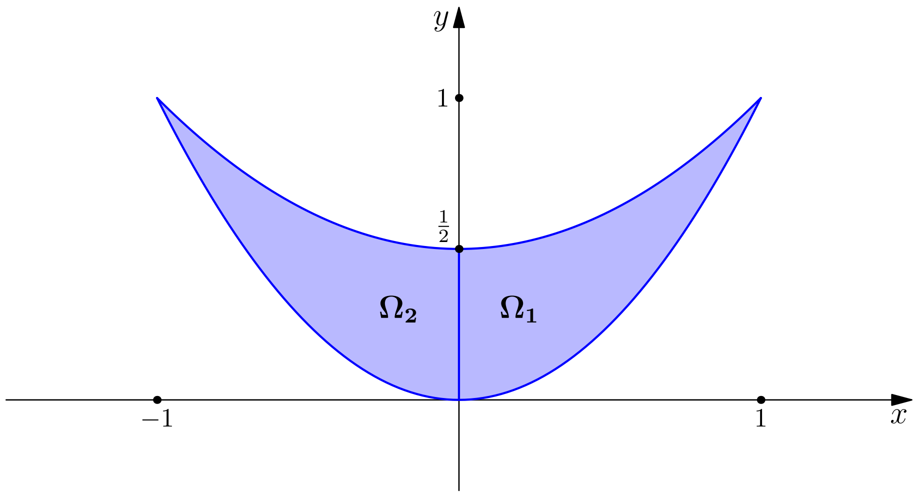
Poiché Ω è simmetrico rispetto all'asse y, si ha $x_B = 0$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned}
y_B &= \frac{1}{\mathcal{A}(\Omega)} \iint_\Omega y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 - x^4\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}x^4\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{3}{4}\left[\frac{x}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{3}{20}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, il baricentro di Ω è $B = (0, \frac{2}{5})$.



(e) Sia Ω_1 la porzione di Ω che giace nel primo quadrante e sia Ω_2 la porzione di Ω che giace nel secondo quadrante, come nella figura seguente:



Entrambe queste regioni sono semplici (ossia sono y-semplici e x-semplici) e $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ con Ω_1 e Ω_2 che si intersecano solo lungo il bordo. Pertanto, essendo $\mathbf{F}$ di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$, si può utilizzare il teorema di Gauss-Green:

$$\begin{aligned}
L_\gamma(\mathbf{F}) &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_\Omega (2x + y - 2 - x + 3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_\Omega (x + y + 1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \mathcal{A}(\Omega)\,x_B + \mathcal{A}(\Omega)\,y_B + \mathcal{A}(\Omega) \\
&= \frac{14}{15}\,.
\end{aligned}$$

3. L'insieme Ω è semplice e il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$. Quindi, per il teorema della divergenza, si ha

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

dove

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 3x^2z^2 + 3y^2z^2 + 3(x^2+y^2)z^2 = 3(x^2+y^2)z^2 + 3(x^2+y^2)z^2 = 6(x^2+y^2)z^2\,.$$

Pertanto, passando alle coordinate cilindriche, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \iiint_\Omega 6(x^2+y^2)z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\rho^2} 6\rho^2 t^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\
&= 6\frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[\int_0^{\rho^2} t^2\,\mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\rho = 3\pi \int_0^1 \rho^3 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\rho^2} \mathrm{d}\rho \\
&= 3\pi \int_0^1 \rho^3 \frac{\rho^6}{3}\mathrm{d}\rho = \pi \int_0^1 \rho^9 \mathrm{d}\rho = \pi \left[\frac{\rho^{10}}{10} \right]_0^1 = \frac{\pi}{10}\,.
\end{aligned}$$