Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II **Primo appello – 23 Luglio 2015**

Cognome: ______________ **Matricola:** ______________
Nome: ______________

Es.1: 6 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 4 punti	**Es.4**: 10 punti	**Es.5**: 7 punti	**Totale**

1. (a) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'(x) - \frac{y(x)}{1+x^2} = \mathrm{e}^{x+\operatorname{artg} x}\,.$$
   (b) Determinare la soluzione $\overline{y}$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{y(x)}{1+x^2} = \mathrm{e}^{x+\operatorname{artg} x} \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$
   (c) Calcolare il limite
$$L = \lim_{x\to-\infty} \overline{y}(x)\,.$$

2. Calcolare la lunghezza della curva
$$\gamma : \begin{cases} x = t^2\cos 2t \\ y = t^2 \sin 2t \\ z = t \end{cases} \qquad t\in[0,1]\,.$$

3. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^8 - y^8$.
   (a) Mostrare che $O \equiv (0,0)$ è un punto critico di f.
   (b) Determinare la natura del punto O rispetto a f.

4. Si consideri il campo vettoriale $\mathbf{F} = ((1+2x^2)\,y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}, (1+2y^2)\,x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2})$.
   (a) Mostrare che $\mathbf{F}$ è irrotazionale.
   (b) Mostrare che $\mathbf{F}$ è conservativo.
   (c) Determinare un potenziale U di $\mathbf{F}$.
   (d) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ dal punto $P\equiv(2,1)$ al punto $Q\equiv(-1,-2)$.

5. Calcolare la massa della regione
$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ :\ 1\le x^2+y^2\le 4\,,\ y\ge |x|\,,\ 0\le z\le 1\}$$
munita della densità di massa $\delta(x,y,z) = x^2+y^2+z$.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Pertanto, il suo integrale generale è

$$\begin{aligned} y(x) &= \mathrm{e}^{\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}} \left[\int \mathrm{e}^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}} \mathrm{e}^{x+\operatorname{artg} x} \mathrm{d}x + c \right] \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} \left[\int \mathrm{e}^{-\operatorname{artg} x} \mathrm{e}^{x+\operatorname{artg} x} \mathrm{d}x + c \right] \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} \left[\int \mathrm{e}^{x}\, \mathrm{d}x + c \right] \\ &= \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} (\mathrm{e}^{x} + c) \end{aligned}$$

dove c è un'arbitraria costante reale di integrazione.

(b) Imponendo la condizione $y(0) = -1$ si ha $-1 = 1 + c$, ossia $c = -2$. Pertanto, la soluzione cercata è

$$\overline{y}(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} (\mathrm{e}^{x} - 2) \,.$$

(c) Usando il risultato ottenuto nel punto precedente, si ha

$$L = \lim_{x \to -\infty} \overline{y}(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\operatorname{artg} x} (\mathrm{e}^{x} - 2) = -2\mathrm{e}^{-\pi/2} \,.$$

2. Si ha

$$\begin{cases} x = t^2 \cos 2t \\ y = t^2 \sin 2t \\ z = t \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x' = 2t \cos 2t - 2t^2 \sin 2t \\ y' = 2t \sin 2t + 2t^2 \cos 2t \\ z' = 1 \,. \end{cases}$$

Pertanto, $\|f'(t)\| = \sqrt{2t^2 + 4t^4 + 1} = 1 + 2t^2 \neq 0$ per ogni $t \in [0,1]$. Quindi, la curva γ è regolare e la sua lunghezza è

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^1 \|f'(t)\|\, \mathrm{d}t = \int_0^1 (1 + 2t^2)\, \mathrm{d}t = \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{3} \,.$$

3. (a) Essendo un polinomio, la funzione f è di classe $\mathcal{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$. Poiché $\nabla f(x,y) = (8x^7, -8y^7)$, si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$, ossia $O \equiv (0,0)$ è un punto critico di f.

(b) Per determinare la natura del punto O conviene studiare il segno di f, visto che $f(0,0) = 0$. Poiché

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^8 - y^8 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = \\ &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \,, \end{aligned}$$

si vede subito che la funzione f cambia di segno in ogni intorno di O. Di conseguenza, essendo f derivabile su tutto $\mathbb{R}^2$, O è un punto di sella.

4. (a) Poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= (1 + 2y^2)\, \mathrm{e}^{x^2+y^2} + 2x^2(1 + 2y^2)\, \mathrm{e}^{x^2+y^2} = (1 + 2x^2)(1 + 2y^2)\, \mathrm{e}^{x^2+y^2} \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= (1 + 2x^2)\, \mathrm{e}^{x^2+y^2} + 2y^2(1 + 2x^2)\, \mathrm{e}^{x^2+y^2} = (1 + 2x^2)(1 + 2y^2)\, \mathrm{e}^{x^2+y^2} \,, \end{aligned}$$

si ha $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$, ossia $\mathbf{F}$ è un campo irrotazionale.

(b) Il campo $\mathbf{F}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^2$, ossia è definito su un insieme semplicemente connesso. Di conseguenza, essendo irrotazionale, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(c) Fissato il punto iniziale $X_0 \equiv (0,0)$, un potenziale di $\mathbf{F}$ è

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int_0^x F_1(t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x 0\,\mathrm{d}t + \int_0^y (1+2t^2)\,x\,\mathrm{e}^{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x\,\mathrm{e}^{x^2}\int_0^y (1+2t^2)\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Si tratta di calcolare l'integrale

$$I = \int_0^y (1+2t^2)\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^y t\cdot 2t\,\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Integrando per parti, si ha

$$I = \int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \left[\, t\mathrm{e}^{t^2}\,\right]_0^y - \int_0^y \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = y\,\mathrm{e}^{y^2}\,.$$

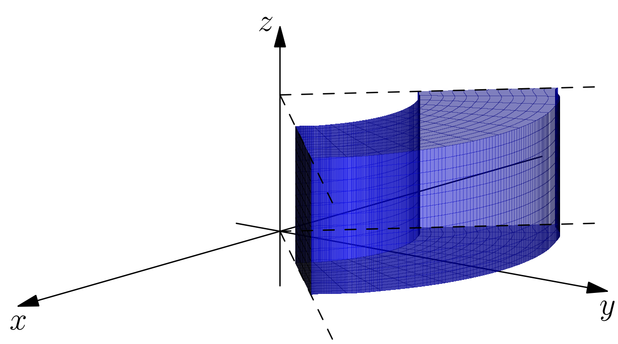
Pertanto, si ha

$$U(x,y) = x\,\mathrm{e}^{x^2}\;y\,\mathrm{e}^{y^2} = x\,y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}\,.$$

(d) Essendo $\mathbf{F}$ un campo conservativo, il suo lavoro da $P \equiv (2,1)$ a $Q \equiv (-1,-2)$ è

$$L(P \to Q) = U(Q) - U(P) = U(-1,-2) - U(2,1) = 2\mathrm{e}^5 - 2\mathrm{e}^5 = 0\,.$$

5. La regione Ω è il seguente pezzo di anello cilindrico



Pertanto, passando alle coordinate cilindriche, Ω è determinata dalle condizioni $1 \le \rho^2 \le 4$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi$ e $0 \le z \le 1$, ossia $1 \le \rho \le 2$, $\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{3}{4}\pi$ e $0 \le z \le 1$. Inoltre, la densità di massa diventa $\delta = \rho^2 + t$. Pertanto, la massa di Ω è

$$\begin{aligned} M &= \iiint_\Omega \delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \int_0^1 (\rho^2+t)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \left[\int_0^1 (\rho^3+\rho t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}\int_1^2 \left[\rho^3 t + \rho\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{2}\int_1^2 \left(\rho^3 + \frac{\rho}{2}\right)\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^2}{4}\right]_1^2 \\ &= \frac{\pi}{2}\left(\frac{2^4}{4} + \frac{2^2}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left(4 + 1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}\,\pi\,. \end{aligned}$$