Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II **Secondo appello – 9 Settembre 2015**

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________
Nome: ______________________

Es.1: 6 punti	**Es.2**: 10 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 10 punti	**Totale**

1. Stabilire se l'integrale improprio
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x^5\, e^{-2x}}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$$
converge.

2. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 5y' + 4y = \frac{6\, e^{2x}}{1 + e^{2x}}\,.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$. Determinare i punti di massimo e di minimo di f.

4. Sia
$$I = \int_\gamma y\, dx + (2x - z)\, dy + (z - x)\, dz$$
dove la curva
$$\gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ z = 1 \end{cases}$$
è orientata in senso antiorario rispetto all'asse z.
   (a) Calcolare l'integrale I mediante la definizione.
   (b) Calcolare l'integrale I utilizzando il teorema di Stokes.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. La funzione integranda
$$f(x) = \frac{x^5\, \mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x^2-1}}$$
è definita, è continua ed è positiva su tutto l'intervallo illimitato $(1, +\infty)$ ed è illimitata per $x \to 1^+$. Si tratta quindi di un integrale improprio e bisogna vedere se la funzione è integrabile per $x \to 1^+$ e per $x \to +\infty$.

   Per $x \to 1^+$, si ha
$$f(x) = \frac{x^5\, \mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^5\, \mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{(x+1)(x-1)}} \sim \frac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2}}\, \frac{1}{(x-1)^{1/2}}\,.$$
Poiché $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, la funzione $\frac{\mathrm{e}^{-2}}{\sqrt{2}} \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$ è integrabile in senso improprio in un intorno destro di 1. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche f è integrabile in senso improprio in un intorno destro di 1.

   Per $x \to +\infty$, si ha
$$f(x) = \frac{x^5\, \mathrm{e}^{-2x}}{\sqrt{x^2-1}} \sim \frac{x^5 \mathrm{e}^{-2x}}{x} = (x^6 \mathrm{e}^{-2x})\, \frac{1}{x^2} \le \frac{1}{x^2}\,.$$
Poiché $\alpha = 2 > 1$, la funzione $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$. Quindi, per il criterio del confronto e per il criterio del confronto asintotico, anche f è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$.

   In conclusione, l'integrale improprio I converge.

2. *Primo modo.* L'equazione caratteristica dell'equazione differenziale data è $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, da cui si ha $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$. Pertanto, la soluzione generale dell'equazione differenziale omogenea associata è
$$y(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{4x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$
A questo punto si tratta di determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa. Per fare questo si può utilizzare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Scelte come soluzioni indipendenti dell'equazione omogenea le funzioni $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ e $y_2(x) = \mathrm{e}^{4x}$, una soluzione particolare dell'equazione completa è data da
$$\overline{y}(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$
dove $c_1(x)$ e $c_2(x)$ sono una soluzione del sistema
$$\begin{cases} y_1(x) c_1'(x) + y_2(x) c_2'(x) = 0 \\ y_1'(x) c_1'(x) + y_2'(x) c_2'(x) = q(x) \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} \mathrm{e}^x c_1'(x) + \mathrm{e}^{4x} c_2'(x) = 0 \\ \mathrm{e}^x c_1'(x) + 4\mathrm{e}^{4x} c_2'(x) = \frac{6\,\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,. \end{cases}$$
Il determinante della matrice dei coefficienti è $\Delta = 3\mathrm{e}^{5x}$. Pertanto, si ha
$$c_1'(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & \mathrm{e}^{4x} \\ \frac{6\,\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} & 4\mathrm{e}^{4x} \end{vmatrix} = \frac{1}{3\mathrm{e}^{5x}}\, \frac{-6\,\mathrm{e}^{6x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = -2 \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$
$$c_2'(x) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & 0 \\ \mathrm{e}^x & \frac{6\,\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{1}{3\mathrm{e}^{5x}}\, \frac{6\,\mathrm{e}^{3x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = \frac{2\,\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,.$$
Integrando, si ha
$$c_1(x) = -2 \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{2x}}\, \mathrm{d}x = -2 \,\mathrm{artg}\, \mathrm{e}^x\,.$$

Inoltre, posto $t = \mathrm{e}^{-2x}$, si ha $\mathrm{d}t = -2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ e

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int \frac{2\,\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{1+1/t}\,\mathrm{d}t = -\int \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1-(1+t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \left(\frac{1}{1+t} - 1\right)\mathrm{d}t = \ln|1+t| - t = \ln(1+\mathrm{e}^{-2x}) - \mathrm{e}^{-2x}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\overline{y}(x) = -2\mathrm{e}^{x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + (\ln(1+\mathrm{e}^{-2x}) - \mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{4x} = -2\mathrm{e}^{x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{4x}\ln(1+\mathrm{e}^{-2x}) - \mathrm{e}^{2x}\,.$$

In conclusione, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{4x} + \overline{y}(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{4x} - 2\mathrm{e}^{x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{4x}\ln(1+\mathrm{e}^{-2x}) - \mathrm{e}^{2x}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Secondo modo. L'equazione data può essere risolta anche con il metodo operatoriale. Poiché l'equazione di partenza può essere scritta nella forma

$$(D-1)(D-4)y(x) = \frac{6\,\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

e poiché, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha l'identità

$$(D-\lambda)y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}D(\mathrm{e}^{-\lambda x}y(x))\,,$$

abbiamo che

$$\mathrm{e}^{x}D(\mathrm{e}^{-x}(D-4)y(x)) = \frac{6\,\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

ossia

$$D(\mathrm{e}^{-x}(D-4)y(x)) = \frac{6\,\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,.$$

Integrando, si ha

$$\mathrm{e}^{-x}(D-4)y(x) = \int \frac{6\,\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = 6\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + c_1 \qquad c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto, si ha

$$(D-4)y(x) = 6\mathrm{e}^{x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + c_1\mathrm{e}^{x} \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

ossia

$$\mathrm{e}^{4x}D(\mathrm{e}^{-4x}y(x)) = 6\mathrm{e}^{x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + c_1\mathrm{e}^{x} \qquad c_1 \in \mathbb{R}$$

da cui si ha

$$D(\mathrm{e}^{-4x}y(x)) = 6\mathrm{e}^{-3x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + c_1\mathrm{e}^{-3x} \qquad c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Integrando, si ha

$$\mathrm{e}^{-4x}y(x) = 6\int \mathrm{e}^{-3x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x + c_1\mathrm{e}^{-3x} + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} \int \mathrm{e}^{-3x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{3}\,\mathrm{e}^{-3x}\operatorname{artg}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{6}\left(\ln(1+\mathrm{e}^{-2x}) - \mathrm{e}^{-2x}\right) \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$e^{-4x}y(x) = -2\,e^{-3x}\,\text{artg}\,e^{x} + \ln(1+e^{-2x}) - e^{-2x} + c_1 e^{-3x} + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

ossia

$$y(x) = -2\,e^{x}\,\text{artg}\,e^{x} + e^{4x}\,\ln(1+e^{-2x}) - e^{2x} + c_1 e^{x} + c_2 e^{4x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

3. I punti singolari di f si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} y = x^3 \\ x = y^3\,. \end{cases}$$

Sostituendo $y = x^3$ nella seconda equazione, si trova $x = x^9$, ossia $x(x^8-1) = 0$, ossia $x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1) = 0$. Pertanto, si ha $x = 0, \pm 1$. Si hanno così i punti singolari $O \equiv (0,0)$, $A \equiv (1,1)$ e $B \equiv (-1,-1)$.

La matrice hessiana di f è

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8x^2 & -4 \\ -4 & 8y^2 \end{bmatrix}.$$

Nel punto $O \equiv (0,0)$, la matrice hessiana è

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det H(0,0) = -16 < 0$, il punto O è un punto di sella.

Nei punti $A \equiv (1,1)$ e $B \equiv (-1,-1)$, la matrice hessiana è

$$H(\pm 1, \pm 1) = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}.$$

Poiché $\det H(\pm 1,\pm 1) = 48 > 0$ e $f_{xx}(\pm 1, \pm 1) = 8 > 0$, i due punti A e B sono punti di minimo. In particolare, tali punti sono punti di minimo assoluto. Infatti, si ha $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$ e

$$f(x,y) - (-2) = x^4 + y^4 - 4xy + 2 = (x^4 - 2x^2y^2 + y^4) + 2(x^2y^2 - 2xy + 1) = (x^2-y^2)^2 + 2(xy-1)^2 \geq 0$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ossia $f(x,y) \geq -2$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4. (a) La curva γ, essendo l'intersezione di una sfera con un piano, è una circonferenza. Più precisamente, avendo equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 4 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 1\,, \end{cases}$$

è la circonferenza che giace sul piano di equazione $z = 1$ e che ha centro $C \equiv (0,0,1)$ e raggio $r = \sqrt{3}$. Pertanto, γ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\sin\theta \\ z = 1 \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Orientando γ mediante l'orientazione indotta dalla parametrizzazione scelta, si ha che γ è orientata in senso antiorario rispetto all'asse z, come richiesto. Poiché

$$\begin{cases} x' = -\sqrt{3}\sin\theta \\ y' = \sqrt{3}\cos\theta \\ z' = 0\,, \end{cases}$$

si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [\sqrt{3}\sin\theta(-\sqrt{3}\sin\theta) + (2\sqrt{3}\cos\theta - 1)\sqrt{3}\cos\theta]\, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-3\sin^2\theta + 6\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta)\, \mathrm{d}\theta \\ &= \left[-\frac{3}{2}\,\theta - \frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta + 3\theta + 3\sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \left[\frac{3}{2}\,\theta + \frac{3}{2}\sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi\,. \end{aligned}$$

(b) Utilizzando il teorema di Stokes, si ha

$$I = \iint_\Sigma \langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle \mathrm{d}\sigma$$

dove $\mathbf{F} = (y, 2x - z, z - x)$ e Σ è un'opportuna superficie tale che $\gamma = \partial\Sigma$. Nel nostro caso, possiamo scegliere Σ come il disco che giace sul piano di equazione $z = 1$ e che ha centro $C \equiv (0, 0, 1)$ e raggio $r = \sqrt{3}$. Inoltre orientiamo Σ mediante il versore normale $\mathbf{n} = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. In questo modo, l'orientazione del bordo, ossia l'orientazione di γ, è quella richiesta. Poiché

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & 2x - z & z - x \end{vmatrix} = (1, 1, 1)\,,$$

si ha $\langle \mathrm{rot}\,\mathbf{F}, \mathbf{n}\rangle = 1$ e quindi

$$I = \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \mathcal{A}(\Sigma) = 3\pi\,.$$