Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II **Terzo appello – 26 Febbraio 2016**

**Cognome:** ______________________ **Matricola:** ______________________
**Nome:** ______________________

| **Es.1**: 7 punti | **Es.2**: 6 punti | **Es.3**: 15 punti | **Es.4**: 5 punti | **Totale** |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

1. (a) Mostrare che il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = 2x(y(x)^2+1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
possiede esattamente una soluzione (locale).
(b) Determinare la soluzione $\overline{y}$ del problema di Cauchy dato.
(c) Determinare l'intervallo massimale su cui $\overline{y}$ può essere estesa.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^x$.
(a) Determinare i punti di massimo e di minimo di $f$.
(b) Determinare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f$ sull'insieme
$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}.$$

3. Sia
$$\gamma : \begin{cases} x = \theta + \cos\theta \\ y = \theta + \sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$
(a) Mostrare che $\gamma$ è una curva semplice e regolare.
(b) Determinare i versori della terna intrinseca di $\gamma$ nel punto $P \equiv (1,0,0)$.
(c) Determinare il centro di curvatura di $\gamma$ nel punto $P$.
(d) Calcolare l'integrale di linea
$$I = \int_{\gamma'} z\sqrt{2+x-y}\,\mathrm{d}s$$
dove $\gamma'$ è l'arco di linea che si ottiene da $\gamma$ per $\theta \in [0,2\pi]$.
(e) Stabilire se il campo vettoriale $\mathbf{F} = (2y, -2x, x^2+y^2+z^2)$ è conservativo.
(f) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma'$.

4. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F} = (x^2+y^2+z^2, 2xyz, z^3)$ attraverso la superficie $\Sigma = \partial\Omega$, dove
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2 \leq 9\,,\ -1 \leq z \leq 2\}.$$

**Istruzioni.** *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *2 ore.*

**Soluzioni**

1. (a) L'equazione differenziale data è del primo ordine a variabili separabili, con $a(x) = 2x$ e $b(y) = y^2 + 1$. Poiché $a$ è continua in un intorno di $x_0 = 0$ e $b$ è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = 1$, la soluzione del problema di Cauchy dato esiste ed è unica (localmente).

$$\begin{cases} y'(x) = 2x(y(x)^2 + 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

(b) Poiché non ci sono soluzioni singolari ( $b(y) = 0$ non ha soluzioni), possiamo separare le variabili e integrare:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1 + y^2} = \int 2x \, \mathrm{d}x$$

da cui si ha

$$\operatorname{artg} y(x) = x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 1$, si ha $\operatorname{artg} y(0) = c$, ossia $c = \operatorname{artg} 1 = \frac{\pi}{4}$. Pertanto, la soluzione cercata è

$$\overline{y}(x) = \operatorname{tg}\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right).$$

(c) La funzione tg che compare nell'espressione della soluzione $\overline{y}$ è l'inversa della funzione arcotangente e quindi è definita solo sull'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Di conseguenza, la funzione $\overline{y}$ è definita per

$$-\frac{\pi}{2} < x^2 + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \qquad \text{ossia per} \qquad -\frac{3\pi}{4} < x^2 < \frac{\pi}{4}.$$

Poiché la prima disuguaglianza è sempre verificata, si deve avere $x^2 < \frac{\pi}{4}$, ossia $-\frac{\sqrt{\pi}}{2} < x < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Pertanto, l'intervallo massimale su cui $\overline{y}$ può essere estesa è $(-\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x, y) = (x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^x$.

(a) I punti critici di $f$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (2x + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^x = 0 \\ 2y\,\mathrm{e}^x = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 2x + x^2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui si ha $x = 0, -2$ e $y = 0$. Pertanto i punti critici sono $A \equiv (0, 0)$ e $B \equiv (-2, 0)$. Poiché

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2 + 4x + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y\,\mathrm{e}^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\,\mathrm{e}^x,$$

la matrice hessiana di $f$ è

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} (2 + 4x + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^x & 2y\,\mathrm{e}^x \\ 2y\,\mathrm{e}^x & 2\,\mathrm{e}^x \end{bmatrix}$$

In $A \equiv (0, 0)$, la matrice hessiana

$$H(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

è definita positiva (avendo due autovalori positivi). Quindi $A$ è un punto di minimo (assoluto). In realtà, questo lo si poteva dire subito essendo $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0,0) = 0$.

In $B \equiv (-2,0)$, la matrice hessiana

$$H(-2,0) = \begin{bmatrix} -2\,\mathrm{e}^{-2} & 0 \\ 0 & 2\,\mathrm{e}^{-2} \end{bmatrix}$$

è indefinita (avendo un autovalore negativo e un autovalore positivo). Quindi $B$ è un punto di sella.

(b) L'insieme $\Omega$ è il disco di centro $O \equiv (0,0)$ e raggio $1$. Quindi, essendo $f$ continua su un insieme chiuso e limitato (compatto), per il teorema di Weierstrass $f$ ammette valore minimo e massimo assoluto du $\Omega$. Abbiamo già visto che $f$ ammette valore minimo assoluto, pari a $0$, nel punto $A \equiv (0,0)$. Poiché $f$ non ammette altri estremi liberi, il valore massimo lo assumerà lungo il bordo di $\Omega$. Lungo il bordo di $\Omega$, la funzione $f$ si restringe alla funzione $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definita da $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$. Poiché la funzione esponenziale è strettamente crescente, la funzione $\varphi$ assume il suo valore minimo in $x = -1$, dato da $\varphi(-1) = \mathrm{e}^{-1}$, ed il suo valore massimo in $x = 1$, dato da $\varphi(1) = \mathrm{e}$. Pertanto, la funzione $f$ ammette un massimo assoluto nel punto $C \equiv (1,0)$, che vale $\mathrm{e}$.
Equivalentemente, posto $x = \cos\theta$ e $y = \sin\theta$, la restrizione di $f$ a $\partial\Omega$ è

$$F(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = \mathrm{e}^{\cos\theta} \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Poiché $F'(\theta) = -\sin\theta\ \mathrm{e}^{\cos\theta}$, si ha $F'(\theta) \geq 0$ se e solo se $\sin\theta \leq 0$, ossia se e solo se $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Pertanto, $F$ ha un minimo assoluto per $\theta = \pi$, che vale $\mathrm{e}^{-1}$, e ha un massimo assoluto per $\theta = 0, 2\pi$, che vale $\mathrm{e}$. In conclusione, ritroviamo che la funzione $f$ ammette un massimo assoluto nel punto $C \equiv (1,0)$, che vale $\mathrm{e}$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione vettoriale, definita da $f(\theta) = (\theta + \cos\theta, \theta + \sin\theta, \theta)$, che parametrizza la curva $\gamma$.

(a) Poiché la terza funzione componente, $z = \theta$, è iniettiva, anche la funzione vettoriale $f$ è iniettiva, ossia $\gamma$ è una curva semplice. Inoltre, essendo

$$\begin{cases} x' = 1 - \sin\theta \\ y' = 1 + \cos\theta \\ z' = 1\,, \end{cases}$$

si ha che la terza componente non si annulla mai e quindi $f'(\theta) \neq \mathbf{0}$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, ossia $\gamma$ e regolare.

(b) Si vede subito che $P \equiv (1,0,0) \in \gamma$ per $t = 0$. Quindi $f'(0) = (1,2,1)$ e

$$\mathbf{t}(0) = \frac{f'(0)}{\|f'(0)\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}}\,.$$

Poiché

$$\begin{cases} x'' = -\cos\theta \\ y'' = -\sin\theta \\ z'' = 0\,, \end{cases}$$

si ha $f''(0) = (-1,0,0)$ e

$$f'(0) \wedge f''(0) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,-1,2)\,.$$

Quindi, si ha

$$\mathbf{b}(0) = \frac{f'(0) \wedge f''(0)}{\|f'(0) \wedge f''(0)\|} = \frac{(0,-1,2)}{\sqrt{5}}\,.$$

Infine, si ha

$$\mathbf{n}(0) = \mathbf{b}(0) \wedge \mathbf{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-5,2,1)}{\sqrt{30}}\,.$$

(c) La curvatura e il raggio di curvatura di $\gamma$ in $P$ sono

$$\kappa(0) = \frac{\|f'(0) \wedge f''(0)\|}{\|f'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{5}}{6\sqrt{6}} \qquad \text{e} \qquad \rho(0) = \frac{1}{\kappa(0)} = \frac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{30}}{5}\,.$$

Pertanto, il centro di curvatura di $\gamma$ in $P$ è

$$C(0) = P + \rho(0)\,\mathbf{n}(0) = (1,0,0) + \frac{6\sqrt{30}}{5}\,\frac{(-5,2,1)}{\sqrt{30}} = \left(-5, \frac{12}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

(d) Poiché $\|f'(\theta)\| = \sqrt{(1-\sin\theta)^2 + (1+\cos\theta)^2 + 1} = \sqrt{4 - 2\sin\theta + 2\cos\theta}$, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \theta\sqrt{2+\theta+\cos\theta-\theta-\sin\theta}\;\|f'(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \theta\sqrt{2-\sin\theta+\cos\theta}\;\sqrt{4-2\sin\theta+2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} (2\theta - \theta\sin\theta + \theta\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \sqrt{2}\left[\theta^2 + \theta\cos\theta - \sin\theta + \theta\sin\theta + \cos\theta\right]_0^{2\pi} \\ &= \sqrt{2}(4\pi^2 + 2\pi) \\ &= 2\sqrt{2}\,\pi\,(2\pi+1)\,. \end{aligned}$$

(e) Il campo vettoriale $\mathbf{F}$ è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ (che è semplicemente connesso). Poiché $\operatorname{rot}\mathbf{F} = (2y, -2x, -4)$, il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale e quindi non è conservativo.

(f) Il lavoro del campo $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ lungo la curva $\gamma'$ è

$$L_{\gamma'}(\mathbf{F}) = \int_{\gamma'} \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}s\rangle = \int_0^{2\pi} (F_1(\theta)x'(\theta) + F_2(\theta)y'(\theta) + F_3(\theta)z'(\theta))\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Poiché

$$\begin{aligned} &F_1(\theta)x'(\theta) + F_2(\theta)y'(\theta) + F_3(\theta)z'(\theta) = \\ &\quad = 2(\theta+\sin\theta)(1-\sin\theta) - 2(\theta+\cos\theta)(1+\cos\theta) + ((\theta+\cos\theta)^2 + (\theta+\sin\theta)^2 + \theta^2)1 \\ &\quad = 2(\theta - \theta\sin\theta + \sin\theta - \sin^2\theta - \theta - \theta\cos\theta - \cos\theta - \cos^2\theta) + \\ &\qquad + \theta^2 + 2\theta\cos\theta + \cos^2\theta + \theta^2 + 2\theta\sin\theta + \sin^2\theta + \theta^2 \\ &\quad = -2\theta\sin\theta + 2\sin\theta - 2\theta\cos\theta - 2\cos\theta - 2 + 2\theta^2 + 2\theta\cos\theta + 2\theta\sin\theta + 1 + \theta^2 \\ &\quad = 3\theta^2 - 1 + 2\sin\theta - 2\cos\theta\,, \end{aligned}$$

si ha

$$L_{\gamma'}(\mathbf{F}) = \int_0^{2\pi} (3\theta^2 - 1 + 2\sin\theta - 2\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta = \left[\theta^3 - \theta - 2\cos\theta - 2\sin\theta\right]_0^{2\pi} = 8\pi^3 - 2\pi\,.$$

4. La regione $\Omega$ è $z$-semplice e il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$. Quindi, per calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso $\Sigma$, possiamo utilizzare il teorema della divergenza:

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{F}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_\Omega (2x + 2xz + 3z^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Poiché $\Omega$ è una regione cilindrica, possiamo utilizzare le coordinate cilindriche $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = t$. Si ha che $\Omega$ è determinato dalle condizioni $0 \le \rho \le 3$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $-1 \le t \le 2$ e

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^2 (2\rho\cos\theta + 2\rho t\cos\theta + 3t^2)\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^2 (2\rho^2\cos\theta + 2\rho^2 t\cos\theta + 3\rho t^2)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left[2\rho^2 t\cos\theta + \rho^2 t^2\cos\theta + \rho t^3\right]_{-1}^2 \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^3 \int_0^{2\pi} (9\rho^2\cos\theta + 9\rho)\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta \\
&= 9\int_0^3 \left[\rho^2\sin\theta + \rho\theta\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\rho \\
&= 9\int_0^3 2\pi\rho\, \mathrm{d}\rho \\
&= 9\pi\left[\rho^2\right]_0^3 \\
&= 81\pi\,.
\end{aligned}$$