Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — **Preparazione al compito finale**

**Cognome:** ______________________ **Matricola:** ______________________
**Nome:** ______________________

| **Es.1**: 6 punti | **Es.2**: 10 punti | **Es.3**: 9 punti | **Es.4**: 6 punti | **Totale** |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

1. Stabilire se l'integrale improprio
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{-6x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$$
converge.

2. Risolvere il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2(x-1)\,\mathrm{e}^{x} \\ y'(0) = 2 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$
   (a) Stabilire se $f$ è continua in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.
   (b) Stabilire se $f$ è derivabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.
   (c) Stabilire per quali versori $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, con $a^2+b^2 = 1$, la funzione $f$ ammette la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$.
   (d) Stabilire se $f$ è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$.

4. Sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ il campo vettoriale definito, per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ da
$$\mathbf{F}(x,y) = \left( \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} + y^2, x^3 + \frac{y^2}{\sqrt{1+y^2}} \right).$$
   (a) Stabilire se $\mathbf{F}$ è conservativo.
   (b) Calcolare il lavoro compiuto dal campo $\mathbf{F}$ lungo la circonferenza $\gamma$ di centro $O \equiv (0,0)$ e raggio $r$, orientata positivamente.

---

**Istruzioni.** *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

**Tempo.** *2 ore.*

---

**Soluzioni**

1. La funzione integranda
$$f(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-6x}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$$
è definita, è continua ed è positiva su tutto l'intervallo illimitato $(1,+\infty)$ ed è illimitata per $x \to 1^+$. Si tratta quindi di un integrale improprio e bisogna vedere se la funzione è integrabile per $x \to 1^+$ e per $x \to +\infty$.

   Per $x \to 1^+$, si ha
$$f(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-6x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{x\,\mathrm{e}^{-6x}}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)}} \sim \frac{\mathrm{e}^{-6}}{\sqrt[3]{2}}\,\frac{1}{(x-1)^{1/3}}\,.$$
   Poiché $\alpha = \frac{1}{3} < 1$, la funzione $\frac{1}{(x-1)^{1/3}}$ è integrabile in senso improprio in un intorno destro di $1$. Quindi, per il criterio del confronto asintotico, anche $f$ è integrabile in senso improprio in un intorno destro di $1$.

   Per $x \to +\infty$, si ha
$$f(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-6x}}{\sqrt[3]{x^2-1}} \sim \frac{x\,\mathrm{e}^{-6x}}{x^{2/3}} = (x^{7/3}\mathrm{e}^{-2x})\,\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\,.$$
   Poiché $\alpha = 2 > 1$, la funzione $\frac{1}{x^2}$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$. Quindi, per il criterio del confronto e per il criterio del confronto asintotico, anche $f$ è integrabile in senso improprio per $x \to +\infty$.

   In conclusione, l'integrale improprio $I$ converge.

2. Iniziamo a risolvere l'equazione omogenea associata $y'' - 3y' + 2y = 0$. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, ossia $(\lambda-1)(\lambda-2) = 0$. Quindi $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ e l'integrale generale dell'equazione omogenea è
$$y_{\mathrm{om}}(x) = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{2x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$
   Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Possiamo utilizzare il principio di somiglianza, cercando una soluzione del tipo $y(x) = x(ax+b)\,\mathrm{e}^x$ (poiché il coefficiente di $x$ in $\mathrm{e}^x$ è $1$ e $1$ è una soluzione dell'equazione caratteristica). Si ha
$$\begin{aligned} y'(x) &= (ax^2 + (2a+b)x + b)\,\mathrm{e}^x \\ y''(x) &= (ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b))\,\mathrm{e}^x\,. \end{aligned}$$
   Sostituendo nell'equazione completa, si ha
$$(ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b))\,\mathrm{e}^x - 3(ax^2 + (2a+b)x + b)\,\mathrm{e}^x + 2x(ax+b)\,\mathrm{e}^x = 2(x-1)\,\mathrm{e}^x$$
   ossia
$$ax^2 + (4a+b)x + 2(a+b) - 3ax^2 - 3(2a+b)x - 3b + 2ax^2 + 2bx = 2x - 2$$
   ossia
$$-2ax + 2a - b = 2x - 2$$
   ossia $-2a = 2$ e $2a - b = -2$, da cui si ha $a = -1$ e $b = 0$. Pertanto, abbiamo la soluzione particolare
$$\overline{y}(x) = -x^2\,\mathrm{e}^x$$

e quindi l'integrale generale

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + \overline{y}(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{2x} - x^2 \, \mathrm{e}^x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy dato, abbiamo bisogno anche della derivata prima

$$y'(x) = c_1 \mathrm{e}^x + 2c_2 \mathrm{e}^{2x} - 2x \, \mathrm{e}^x - x^2 \, \mathrm{e}^x \, .$$

Imponendo le condizioni iniziali, si ha

$$\begin{cases} y'(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} c_1 + 2c_2 = 2 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui si ricava $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Pertanto, la soluzione cercata è

$$y(x) = \mathrm{e}^{2x} - x^2 \, \mathrm{e}^x \, .$$

3. (a) La funzione $f$ è continua in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$. Infatti passando alle coordinate polari, si ha

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \frac{|\rho^2 \cos\theta \sin\theta|}{\rho} = \rho |\cos\theta \sin\theta| \leq \rho \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0$$

uniformemente rispetto a $\theta$. Quindi, si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = 0 = f(\mathbf{0}) \, .$$

(b) La funzione $f$ è derivabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, poiché in tale punto esistono le due derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0 \, . \end{aligned}$$

(c) Usando la definizione di derivata direzionale, si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{0} + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{v})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \, \frac{abt^2}{\sqrt{a^2t^2 + b^2t^2}} = \lim_{t\to 0} ab \frac{t}{|t|} \, .$$

Tale limite esiste solo per $a = 0$ o per $b = 0$, ossia solo quando $\mathbf{v} = \mathbf{e}_1$ oppure quando $\mathbf{v} = \mathbf{e}_2$. Infatti, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, allora si hanno i seguenti due limiti distinti

$$\lim_{t\to 0^+} ab \frac{t}{|t|} = ab \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to 0^-} ab \frac{t}{|t|} = -ab \, .$$

(d) La funzione $f$ non è differenziabile in $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ poiché in tale punto possiede le derivate parziali, ma nessun'altra derivata direzionale.

4. (a) Sia $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$. Poiché le derivate parziali

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y$$

non sono uguali, il campo $\mathbf{F}$ non è conservativo.

(b) Per calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo $\gamma$ possiamo utilizzare il teorema di Gauss-Green:

$$L = \int_\gamma \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}s \rangle = \int_\Omega \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_\Omega (3x^2 - 2y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq r\}$. Passando alle coordinate polari, si ha

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^r \int_0^{2\pi} (3\rho^2 \cos^2\theta - 2\rho \sin\theta) \, \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^r (3\rho^3 \cos^2\theta - 2\rho^2 \sin\theta) \, \mathrm{d}\rho \right] \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{4} \rho^4 \cos^2\theta - \frac{2}{3} \rho^3 \sin\theta \right]_0^r \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left( \frac{3}{4} r^4 \cos^2\theta - \frac{2}{3} r^3 \sin\theta \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \left[ \frac{3}{4} r^4 \left( \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \cos\theta \sin\theta \right) + \frac{2}{3} r^3 \cos\theta \right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{3}{4} \pi r^4 .
\end{aligned}$$