Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II **Primo compito in itinere – 9 Maggio 2016**

Cognome: ________________ **Matricola:** ________________
Nome: ________________

Es.1: 6 punti	**Es.2**: 10 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 9 punti	**Totale**

1. (a) Verificare che la serie
$$\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$
è convergente.
(b) Mostrare che la serie data è telescopica e calcolarla.

2. (a) Mostrare che il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = \dfrac{x}{y}\, \mathrm{e}^{y^2} \\ y(0) = -\sqrt{2} \end{cases}$$
possiede esattamente una soluzione (locale).
(b) Determinare la soluzione f del problema di Cauchy dato.
(c) Determinare l'intervallo massimale su cui f può essere estesa.
(d) Mostrare che f possiede un punto di massimo assoluto in $x_0 = 0$.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita, sull'intervallo $(-\pi, \pi]$, da
$$f(x) = \operatorname{sign}\left(x^2 - \frac{\pi^2}{4}\right).$$
(a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
(b) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier $F(x)$ di f converge puntualmente e dire a cosa converge.
(c) Scrivere la serie di Fourier di f.

4. Sia
$$\gamma : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \\ z = \mathrm{e}^{\cos\theta} \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$
(a) Mostrare che γ è una curva regolare.
(b) Determinare i versori della terna intrinseca di γ nel punto P corrispondente a $\theta = \pi/2$.
(c) Determinare il centro di curvatura di γ nel punto P.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) La serie è a termini positivi e per $n \to +\infty$ si ha

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \sim \frac{2n}{n^4} = \frac{2}{n^3}.$$

Poiché $1/n^3$ è il termine generale di una serie armonica generalizzata convergente ($\alpha = 3 > 1$), per il criterio della confronto asintotico si può concludere che anche la serie di partenza è convergente.

(b) Poichè

$$a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2-n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2},$$

si ha $a_n = b_n - b_{n+1}$, con $b_n = \frac{1}{n^2}$. Pertanto, la serie data è telescopica e

$$\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n = 1.$$

2. (a) L'equazione differenziale data è del primo ordine a variabili separabili, con $a(x) = x$ e $b(y) = e^{y^2}/y$. Poiché a è continua in un intorno di $x_0 = 0$ e b è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $y_0 = -\sqrt{2}$, la soluzione del problema di Cauchy dato esiste ed è unica (localmente).

(b) Poiché non ci sono soluzioni singolari ($b(y) = 0$ non ha soluzioni), possiamo separare le variabili e integrare:

$$\int y e^{-y^2}\, dy = \int x\, dx$$

da cui si ha

$$-\frac{1}{2}\, e^{-y^2} = \frac{x^2}{2} + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

ossia

$$e^{-y^2} = -x^2 - 2c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(0) = -\sqrt{2}$, si ha $e^{-2} = -2c$. Pertanto, la funzione richiesta f è determinata dall'equazione

$$e^{-f(x)^2} = -x^2 + e^{-2}$$

da cui si ricava

$$-f(x)^2 = \ln(e^{-2} - x^2)$$

ossia

$$f(x) = \pm\sqrt{-\ln(e^{-2} - x^2)}.$$

Poiché per la condizione iniziale si ha $f(0) = -\sqrt{2} < 0$, la soluzione cercata è

$$f(x) = -\sqrt{-\ln(e^{-2} - x^2)}.$$

(c) Affinché la funzione f sia definita si deve avere $e^{-2} - x^2 > 0$ (per l'esistenza del logaritmo) e $-\ln(e^{-2} - x^2) \geq 0$ (per l'esistenza della radice). La prima condizione è equivalente a $x^2 - e^{-2} < 0$, ossia a $-e^{-1} < x < e^{-1}$. La seconda condizione è equivalente a $\ln(e^{-2} - x^2) \leq 0$, ossia a $e^{-2} - x^2 \leq 1$, ossia a $x^2 + 1 - e^{-2} \geq 0$. Quest'ultima condizione è sempre verificata, poiché $x^2 \geq 0$ e $1 - e^{-2} > 0$. In conclusione, la funzione f è definita

sull'intervallo $(-e^{-1}, e^{-1})$. Su tale intervallo, f è anche derivabile. Quindi, l'intervallo $(-e^{-1}, e^{-1})$ è l'intervallo massimale su cui possiamo estendere f.
OSSERVAZIONE. La funzione f è pari, è negativa e

$$\lim_{x\to(e^{-1})^-} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to(-e^{-1})^+} f(x) = -\infty\,.$$

(d) Possiamo mostrare che f ha un punto di massimo in $x_0 = 0$ senza utilizzare la forma esplicita di f trovata nei punti precedenti. Infatti, poiché $f'(x) = \frac{x}{f(x)}\,e^{f(x)^2}$, si ha $f'(0) = 0$, ossia $x_0 = 0$ è un punto stazionario per f. Inoltre, si ha

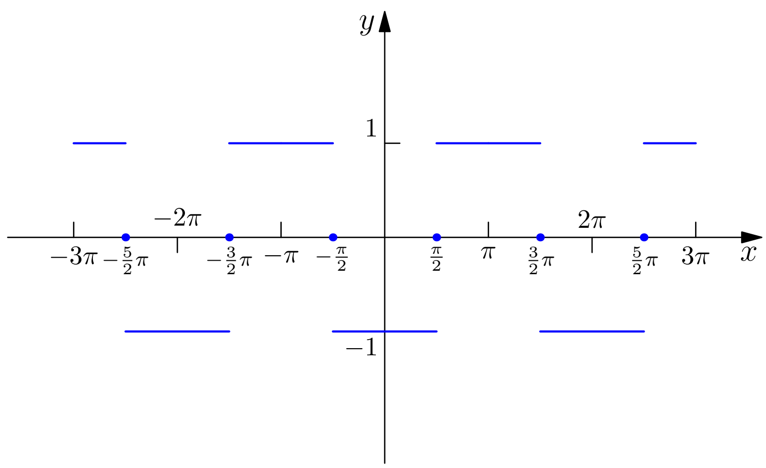
$$f''(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{f(x)^2}\,e^{f(x)^2} + \frac{x}{f(x)}\,2f(x)f'(x)\,e^{f(x)^2}$$

e quindi

$$f''(0) = \frac{f(0)}{f(0)^2}\,e^{f(0)^2} = \frac{e^{f(0)^2}}{f(0)} = -\frac{e^2}{\sqrt{2}} < 0\,.$$

Pertanto, $x_0 = 0$ è un punto di massimo locale di f.
Per mostrare che $x_0 = 0$ è un punto di massimo assoluto utilizziamo l'informazione (trovata nei punti precedenti) che f assume solo valori negativi. Poiché $f'(x) = \frac{x}{f(x)}\,e^{f(x)^2}$, si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $\frac{x}{f(x)} > 0$, ossia se e solo se $x < 0$. Pertanto, f è strettamente crescente per $x < 0$ ed è strettamente decrescente per $x > 0$. Quindi, in $x_0 = 0$ si ha un punto di massimo assoluto.

3. (a) Il grafico di f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$ è



(b) Poiché la funzione f è regolare a tratti sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, la serie di Fourier $F(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$. In particolare, essendo f continua in ogni punto $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier $F(x)$ converge ad $f(x)$ in tutti questi punti. Inoltre, poiché f presenta un salto finito in ogni punto $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier $F(x)$ converge alla media dei limiti destro e sinistro:

$$F(x_k) = \frac{f(x_k^-) + f(x_k^+)}{2} = 0 \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

(c) Poiché la funzione f è pari, si ha $b_n = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} dx = -\frac{2}{\pi}\,\big[\,x\,\big]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\,\big[\,x\,\big]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi}\,\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\,\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -2 + 2 = 0\,. \end{aligned}$$

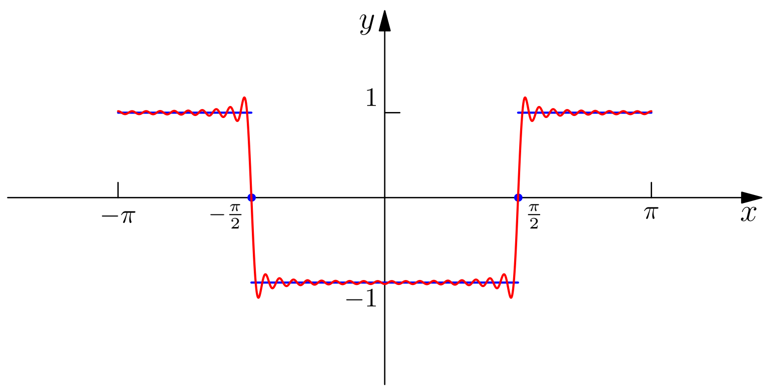
Per $n \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,\mathrm{d}x + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{2}{n\pi}\ \sin n\frac{\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}\ \sin n\frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{4}{n\pi}\ \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{per } n = 2k \text{ pari} \\ -(-1)^k \dfrac{4}{(2k+1)\pi} & \text{per } n = 2k+1 \text{ dispari}. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto, la serie di Fourier di f è

$$F(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}\ \cos(2n+1)x\,.$$

Osservazione. Il polinomio di Fourier $F_{36}(x)$ dà la seguente approssimazione della funzione f:



4. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione vettoriale, definita da $f(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, \mathrm{e}^{\cos\theta})$, che parametrizza la curva γ.

   (a) Poiché f è derivabile e
   $$\begin{cases} x' = -\sin\theta \\ y' = \cos\theta \\ z' = -\sin\theta\ \mathrm{e}^{\cos\theta}\,, \end{cases}$$
   si ha $\|f'(\theta)\| = \sqrt{1+\sin^2\theta\ \mathrm{e}^{2\cos\theta}} \neq 0$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$. Pertanto γ è regolare.

   (b) Si ha $P = f(\pi/2) \equiv (0,1,1)$. Inoltre, si ha $f'(\pi/2) = (-1,0,-1)$, $\|f'(\pi/2)\| = \sqrt{2}$ e
   $$\mathbf{t}(\pi/2) = \frac{f'(\pi/2)}{\|f'(\pi/2)\|} = \frac{(-1,0,-1)}{\sqrt{2}}\,.$$
   Poiché
   $$\begin{cases} x'' = -\cos\theta \\ y'' = -\sin\theta \\ z'' = -\cos\theta\ \mathrm{e}^{\cos\theta} + \sin^2\theta\ \mathrm{e}^{\cos\theta}\,, \end{cases}$$
   si ha $f''(\pi/2) = (0,-1,1)$. Quindi, si ha
   $$f'(\pi/2)\wedge f''(\pi/2) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,1,1)\,,$$

$\|f'(\pi/2) \wedge f''(\pi/2)\| = \sqrt{3}$ e

$$\mathbf{b}(\pi/2) = \frac{f'(\pi/2) \wedge f''(\pi/2)}{\|f'(\pi/2) \wedge f''(\pi/2)\|} = \frac{(-1, 1, 1)}{\sqrt{3}}.$$

Infine, si ha

$$\mathbf{n}(\pi/2) = \mathbf{b}(\pi/2) \wedge \mathbf{t}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{(-1, -2, 1)}{\sqrt{6}}.$$

(c) La curvatura e il raggio di curvatura di γ in P sono

$$\kappa(\pi/2) = \frac{\|f'(\pi/2) \wedge f''(\pi/2)\|}{\|f'(\pi/2)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad \rho(\pi/2) = \frac{1}{\kappa(\pi/2)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Pertanto, il centro di curvatura di γ in P è

$$C(\pi/2) = P + \rho(\pi/2)\, \mathbf{n}(\pi/2) = (0, 1, 1) + \frac{2\sqrt{6}}{3} \frac{(-1, -2, 1)}{\sqrt{6}} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right).$$