Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi Matematica 2 **Secondo compito in itinere – 28 Giugno 2016**

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 8 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 9 punti	**Totale**

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$.

   (b) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{0} = (0,0)$. In caso affermativo, calcolare $\nabla f(0,0)$.

   (c) Dato un versore $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ (con $a^2+b^2 = 1$), stabilire se esiste la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ di f in $\mathbf{0} = (0,0)$.

   (d) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbf{0} = (0,0)$.

2. Determinare i punti di massimo e minimo assoluti della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

   ristretta all'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}\,.$$

3. (a) Disegnare, sull'usuale piano coordinato, l'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\,,\ y \geq x\}\,.$$

   (b) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (y^3(x^2+y^2), x^3(x^2+y^2))$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente.

4. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ attraverso la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = 1 + \rho\cos\theta \\ y = 1 + \rho\sin\theta \\ z = 2 + 2\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta + \rho^2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \rho \in [0,1] \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{array}$$

   (rispetto all'orientazione indotta dalla parametrizzazione assegnata).

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *Due ore.*

Soluzioni

1. (a) Passando in coordinate polari, si ha

$$|F(\rho,\theta)| = |f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)| = \left|\frac{\rho^5\cos^3\theta\sin^2\theta}{\rho^4}\right| = \rho|\cos^3\theta\sin^2\theta| \leq \rho = g(\rho)\,.$$

Poiché $g(\rho)\to 0$ per $\rho\to 0$, si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to 0} F(\rho,\theta) = 0$$

ossia si ha che f è continua in $\mathbf{0}$.

(b) La funzione f è derivabile in $\mathbf{0}$ poiché esistono entrambe le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0\,.$$

Pertanto, si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(c) Dato un versore $\mathbf{v} = (a,b)\in\mathbb{R}^2$ (con $a^2+b^2=1$), si ha

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{0}+t\mathbf{x})-f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\frac{t^5a^3b^2}{t^4(a^2+b^2)^2} = a^3b^2\,.$$

Pertanto, la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(0,0)$ esiste per ogni versore $\mathbf{v}$ e

$$D_{\mathbf{v}}f(0,0) = a^3b^2\,.$$

(d) La funzione f non è differenziabile in $\mathbf{0} = (0,0)$. Infatti, se così fosse, varrebbe la formula del gradiente

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{0}) = \langle\nabla f(\mathbf{0}),\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{0},\mathbf{v}\rangle = 0$$

contrariamente a quanto ottenuto nel punto precedente.

2. Iniziamo con l'osservare che Ω è un insieme compatto, essendo il disco chiuso di centro $C\equiv(1,1)$ e raggio $r=1$. Pertanto, essendo f continua, per il teorema di Weierstrass la funzione f assume massimo e minimo assoluto su Ω.

Cerchiamo i punti critici di f, ossia i punti che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0\,. \end{cases}$$

Pertanto, f ha un solo punto critico nell'origine $O\equiv(0,0)$. Poichè tale punto non si trova all'interno di Ω, il massimo e il minimo assoluti di f su Ω dovranno essere assunti sul bordo γ di Ω.

Il vincolo γ ha equazione $g(x,y)=0$, dove $g(x,y) = x^2+y^2-2x-2y+1$. Poiché $\nabla g(x,y) = (2x-2,2y-2)\neq 0$ per ogni $(x,y)\in\gamma$, il vincolo γ è regolare.

Per determinare i punti di massimo e di minimo di f sulla circonferenza γ, si può procedere in uno nei modi seguenti.

Primo modo. Per il teorema di Fermat relativo ai vincoli, i punti critici di f sotto il vincolo γ soddisfano le condizioni $\nabla f(x,y) /\!\!/ \nabla g(x,y)$ e $g(x,y)=0$, equivalenti al sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)g_y(x,y) - f_y(x,y)g_x(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0\,. \end{cases}$$

Nel nostro caso, si ha

$$\begin{cases} 2x(2y-2) - 2y(2x-2) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Per $y = x$, la seconda equazione diventa $2x^2 - 4x + 1 = 0$, da cui si ha $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$. Si ottengono così i due punti critici vincolati $P_{1,2} \equiv (\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}, \frac{2\pm\sqrt{2}}{2})$. Poiché

$$f\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3 \pm 2\sqrt{2}\,,$$

si ha che il massimo assoluto di f su Ω è $3+2\sqrt{2}$ mentre il minimo assoluto è $3-2\sqrt{2}$.

Secondo modo. Consideriamo la funzione Lagrangiana

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1)$$

e consideriamo il sistema

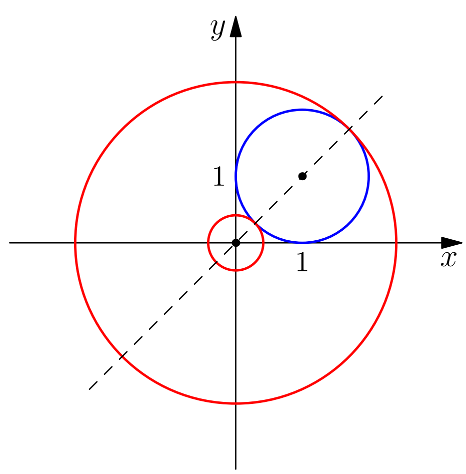
$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 2x + \lambda(2x-2) = 0 \\ 2y + \lambda(2y-2) = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} (1+\lambda)x = \lambda \\ (1+\lambda)y = \lambda \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \,. \end{cases}$$

Se $\lambda = -1$, allora dalle prime due equazioni si avrebbe $0 = -1$, che è assurdo. Pertanto, si ha $\lambda \neq -1$ e quindi $x = y = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. Di conseguenza, si ritrova il sistema

$$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

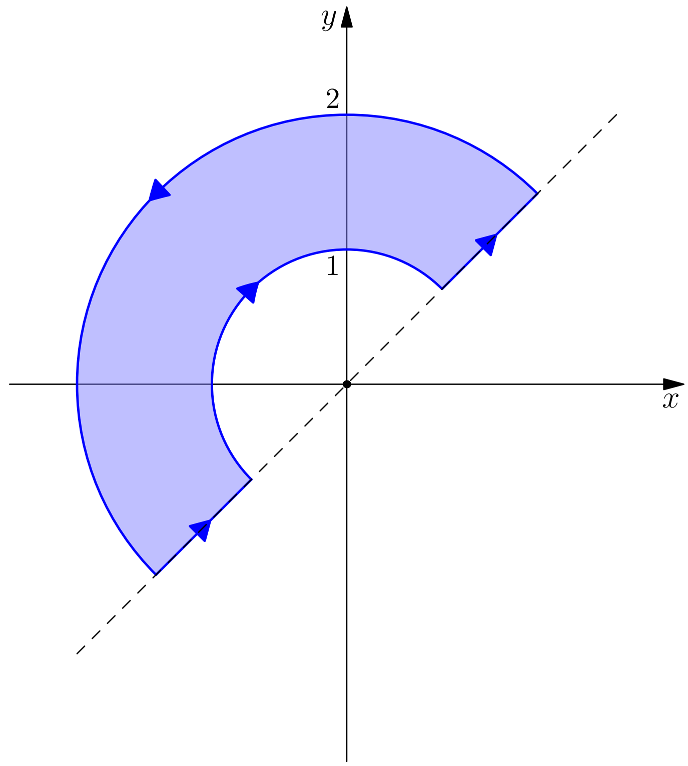
e si riottengono i risultati ottenuti col primo metodo.

Terzo modo. Le linee di livello della funzione f sono le circonferenze di equazione $x^2+y^2 = r^2$. I punti critici di f vanno ricercati tra i punti in cui le linee di livello sono tangenti al vincolo γ. Nel nostro caso, si vede immediatamente che esisto esattamente due linee di livello tangenti al vincolo:



Inoltre, come si vede, i punti di tangenza si trovano intersecando il vincolo con la retta di equazione $y = x$. Si ritrovano, così, i risultati già ottenuti in precedenza.

3. (a) L'insieme Ω è la seguente parte di corona circolare di centro $O \equiv (0,0)$ e di raggi $r_1 = 1$ e $r_2 = 2$:



(b) L'insieme Ω è semplice a pezzi (ossia è unione finita di regioni y-semplici e x-semplici), la curva γ è orientata positivamente e il campo $\mathbf{F} = (x^2y^3 + y^5, x^5 + y^2x^3)$ è di classe $\mathscr{C}^1$ su Ω. Pertanto, per il teorema di Gauss-Green, si ha

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial y} - \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega (5x^4 + 3x^2y^2 - 5y^4 - 3x^2y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= 5 \iint_\Omega (x^4 - y^4)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 5 \iint_\Omega (x^2+y^2)(x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Passando alle coordinate polari, si ha

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = 5 \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \rho^2(\rho^2 \cos^2\theta - \rho^2 \sin^2\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$
$$= 5 \int_1^2 \rho^5\,\mathrm{d}\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 5 \left[\frac{\rho^6}{6} \right]_1^2 \left[\frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = 0\,.$$

4. Primo modo. Sia $\Omega = [0,1] \times [0, 2\pi]$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la superficie Σ, ossia la funzione definita da $f(\rho,\theta) = (1 + \rho\cos\theta, 1 + \rho\sin\theta, 2 + 2\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta + \rho^2)$. Poiché

$$\begin{cases} x_\rho = \cos\theta \\ y_\rho = \sin\theta \\ z_\rho = 2\cos\theta + 2\sin\theta + 2\rho \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_\theta = -\rho\sin\theta \\ y_\theta = \rho\cos\theta \\ z_\theta = -2\rho\sin\theta + 2\rho\cos\theta \end{cases}$$

si ha

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \wedge \frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 2\cos\theta + 2\sin\theta + 2\rho \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & -2\rho\sin\theta + 2\rho\cos\theta \end{vmatrix}$$

ossia

$$\mathbf{N} = (-2\rho(1+\rho\cos\theta), -2\rho(1+\rho\sin\theta), \rho)\,.$$

Poiché la funzione f è di classe $\mathscr{C}^1$ su Ω e $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ per ogni punto interno ad Ω (dove $\rho \neq 0$), la superficie Σ è regolare. Pertanto, il flusso del campo $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ attraverso la superficie Σ è

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta$$

dove

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle &= -2y\rho(1+\rho\cos\theta) + 2x\rho(1+\rho\sin\theta) + z\rho \\ &= -2\rho(1+\rho\sin\theta)(1+\rho\cos\theta) + 2\rho(1+\rho\sin\theta)(1+\rho\cos\theta) + \\ &\quad\; + \rho(2 + 2\rho\cos\theta + 2\rho\sin\theta + \rho^2) \\ &= 2\rho + 2\rho^2\cos\theta + 2\rho^2\sin\theta + \rho^3\,. \end{aligned}$$

Pertanto, si ha

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (2\rho + 2\rho^2\cos\theta + 2\rho^2\sin\theta + \rho^3)\,\mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^1 \left[2\rho\theta + 2\rho^2\sin\theta - 2\rho^2\cos\theta + \rho^3\theta \right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^1 (4\pi\rho - 2\rho^2 + 2\pi\rho^3 + 2\rho^2)\,\mathrm{d}\rho \\ &= \left[2\pi\rho^2 + \frac{\pi}{2}\rho^4 \right]_0^1 \\ &= 2\pi + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{5}{2}\,\pi\,. \end{aligned}$$

Secondo modo. Posto $u = 1 + \rho\cos\theta$ e $v = 1 + \rho\sin\theta$, la superficie Σ ammette la seguente parametrizzazione

$$\Sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad (u, v) \in \Omega$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$. Il versore normale è $\mathbf{N} = (-f_u, -f_v, 1) = (2-u, -2v, 1)$. Pertanto

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle = -2uv + 2uv + u^2 + v^2 = u^2 + v^2$$

e

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega (u^2 + v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Passando alle coordinate polari centrate nel punto $(1, 1)$, definite da

$$\begin{cases} u = 1 + \rho\cos\theta \\ v = 1 + \rho\sin\theta\,, \end{cases}$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[(1+\rho\cos\theta)^2 + (1+\rho\sin\theta)^2\right] \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 + 2\rho\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta + 1 + 2\rho\sin\theta + \rho^2\sin^2\theta)\ \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} (2\rho + \rho^3 + 2\rho^2\cos\theta + 2\rho^2\sin\theta)\ \mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^1 \left[2\rho\theta + \rho^3\theta + 2\rho^2\sin\theta - 2\rho^2\cos\theta\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^1 (4\pi\rho + 2\pi\rho^3)\ \mathrm{d}\rho \\
&= \left[2\pi\rho^2 + \pi\frac{\rho^4}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{2}\,\pi\,.
\end{aligned}
$$