Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi Matematica 2 **Appello in itinere – 28 Giugno 2016**

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________
Nome: ____________________

Es.1: 6 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 11 punti	**Es.4**: 8 punti	**Totale**

1. Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y'' - 6y' + 10y = 50x + 10\,.$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y) = 3xy^2 + y^3 + x^2 - 2x$$
per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Determinare i punti critici di f.
   (b) Determinare la natura dei punti critici di f.
   (c) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $X_0 \equiv (1,1,f(1,1))$.

3. Sia $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, e sia
$$\gamma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 2r\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi]\,.$$
   (a) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{E} = (x^2+y^2, 2rx, y^2)$ lungo la curva γ (rispetto all'orientazione indotta dalla parametrizzazione).
   (b) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2+y^2, xz, yz)$ lungo la curva γ (rispetto all'orientazione indotta dalla parametrizzazione).
   (c) Sia Σ la porzione del cilindro C di equazione $x^2+y^2=r^2$ compresa tra il piano di equazione $z=0$ e la curva γ. Calcolare l'area della superficie Σ.
   (d) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{G} = (xz, yz, x^2y^2z^2)$ attraverso la superficie Σ, orientata mediante la normale che punta verso l'esterno del cilindro C.

4. (a) Mostrare che il campo $\mathbf{F} = (2xy+z^2, x^2+2yz, 2xz+y^2)$ è conservativo.
   (b) Determinare un potenziale di $\mathbf{F}$.
   (c) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva
$$\gamma : \begin{cases} x = 1 + \sin\theta + \theta^2\cos\theta \\ y = 2 - \sin\theta - \theta^3\cos\theta \\ z = 1 + \sin\theta - \theta^4\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0,\pi/2]$$
   (rispetto all'orientazione indotta dalla parametrizzazione).

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *Due ore.*

Soluzioni

1. L'equazione data è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione omogenea associata è $y'' - 6y' + 10y = 0$ e ha come equazione caratteristica $\lambda^2 - 6\lambda + 10y = 0$. Poiché le radici di questa equazione sono $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm \mathrm{i}$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_{\mathrm{om}}(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} \cos x + c_2 \mathrm{e}^{3x} \sin x \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Si tratta ora di determinare una soluzione particolare dell'equazione completa. Per fare questo, possiamo utilizzare il metodo di somiglianza e cercare una soluzione particolare della forma $y(x) = ax + b$. Si ha $y'(x) = a$ e $y''(x) = 0$. Sostituendo nell'equazione completa, si ha

$$-6a + 10(ax + b) = 50x + 10$$

ossia

$$10ax + (10b - 6a) = 50x + 10$$

ossia

$$\begin{cases} 10a = 50 \\ -6a + 10b = 10 \end{cases}$$

da cui si ricava $a = 5$ e $b = 4$. Pertanto, si ha la soluzione particolare

$$\overline{y}(x) = 5x + 4$$

e quindi la soluzione generale

$$y(x) = y_{\mathrm{om}}(x) + \overline{y}(x) = c_1 \mathrm{e}^{3x} \cos x + c_2 \mathrm{e}^{3x} \sin x + 5x + 4 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. La funzione f è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}^2$.

   (a) I punti critici di f sono i punti che si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 3y^2 + 2x - 2 = 0 \\ 6xy + 3y^2 = 0 \end{cases} \qquad \text{ossia} \qquad \begin{cases} 3y^2 + 2x - 2 = 0 \\ (2x + y)y = 0. \end{cases}$$

   Dalla seconda equazione, si ha $y = 0$ oppure $y = -2x$. Se $y = 0$, la prima equazione diventa $2x - 2 = 0$, da cui $x = 1$. Se invece $y = -2x$, la prima equazione diventa $12x^2 + 2x - 2 = 0$, da cui si ha $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{1}{3}$. Pertanto, i punti critici di f sono

$$A \equiv (1, 0), \qquad B \equiv \Big(-\frac{1}{2}, 1\Big), \qquad C \equiv \Big(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\Big).$$

   (b) La matrice hessiana di f è

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6y \\ 6y & 6x + 6y \end{bmatrix}.$$

   Nel punto $A \equiv (1, 0)$, si ha

$$H(A) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

   Poiché ci sono due autovalori positivi, la forma quadratica associata è definita positiva e quindi A è un punto di minimo.
   Nei punti $B \equiv \big(-\frac{1}{2}, 1\big)$ e $C \equiv \big(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\big)$, si ha

$$H(B) = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad H(C) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Poiché, in entrambi i casi, il determinate è negativo, la forma quadratica associata è indefinita e quindi B e C sono entrambi punti di sella.

(c) L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $X_0 \equiv (1,1,3)$ è

$$\begin{aligned} z &= f(1,1) + \langle \nabla f(1,1), (x,y) - (1,1) \rangle \\ &= 3 + \langle (3,9), (x-1, y-1) \rangle \\ &= 3 + 3(x-1) + 9(y-1) \end{aligned}$$

ossia

$$3x + 9y - z - 9 = 0 \,.$$

3. Sia $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza γ, ossia la funzione definita da $f(\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 2r\theta)$. Poiché $f'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 2r) \neq 0$ per ogni $\theta \in [0,\pi]$, la curva γ è regolare. In particolare, γ è un arco di elica cilindrica e giace sul cilindro C.

(a) Il lavoro del campo $\mathbf{E} = (x^2+y^2, 2rx, y^2)$ lungo la curva γ è

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{E}) &= \int_\gamma \langle \mathbf{E}, \mathrm{d}\mathbf{s} \rangle = \int_0^\pi \langle \mathbf{E}(f(\theta)), f'(\theta) \rangle \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi (-r^3\sin\theta + 2r^3\cos^2\theta + 2r^3\sin^2\theta) \, \mathrm{d}\theta \\ &= r^3 \int_0^\pi (-\sin\theta + 2) \, \mathrm{d}\theta = r^3 \big[\cos\theta + 2\theta\big]_0^\pi = 2r^3(\pi - 1) \,. \end{aligned}$$

(b) Il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2+y^2, xz, yz)$ lungo la curva γ è

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \int_\gamma \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s} \rangle = \int_0^\pi \langle \mathbf{F}(f(\theta)), f'(\theta) \rangle \, \mathrm{d}\theta \,.$$

Poiché $\mathbf{F}(f(\theta)) = (r^2, 2r^2\theta\cos\theta, 2r^2\theta\sin\theta)$ e $f'(\theta) = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 2r)$, si ha

$$\langle \mathbf{F}(f(\theta)), f'(\theta) \rangle = -r^3\sin\theta + 2r^3\theta\cos^2\theta + 4r^3\theta\sin\theta$$

e quindi

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = r^3 \int_0^\pi (-\sin\theta + 2\theta\cos^2\theta + 4\theta\sin\theta) \, \mathrm{d}\theta \,.$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} \int \theta\cos^2\theta \, \mathrm{d}\theta &= \theta\left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) - \int \left(\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{4}\sin 2\theta - \frac{\theta^2}{4} + \frac{1}{8}\cos 2\theta \\ &= \frac{\theta^2}{4} + \frac{\theta}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{8}\cos 2\theta \\ \int \theta\sin\theta \, \mathrm{d}\theta &= -\theta\cos\theta + \int \cos\theta \, \mathrm{d}\theta = -\theta\cos\theta + \sin\theta \,. \end{aligned}$$

Quindi, si ha

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= r^3 \left[\cos\theta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta}{2}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\cos 2\theta - 4\theta\cos\theta + 4\sin\theta\right]_0^\pi \\ &= r^3 \left(-1 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{4} + 4\pi - 1 - \frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{r^3}{2}\,(\pi^2 + 8\pi - 4) \,. \end{aligned}$$

(c) Utilizzando le coordinate cilindriche, la superficie Σ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \theta \in [0\,\pi] \\ t \in [0, 2r\theta]\,. \end{array}$$

Il vettore normale è

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$

e la sua norma è $\|\mathbf{N}\| = r$. Pertanto, l'area di Σ è

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\Sigma) &= \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2r\theta} \|\mathbf{N}\|\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= r\int_0^\pi \left[\int_0^{2r\theta} \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\theta = 2r^2 \int_0^\pi \theta\,\mathrm{d}\theta = r^2\left[\theta^2\right]_0^\pi = \pi^2 r^2\,. \end{aligned}$$

(d) Il flusso del campo $\mathbf{G} = (xz, yz, x^2y^2z^2)$ attraverso la superficie Σ è

$$\begin{aligned} \Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \iint_\Sigma \langle \mathbf{G}, \mathbf{n}\rangle\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2r\theta} \langle \mathbf{G}, \mathbf{N}\rangle\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2r\theta} (r^2 t\cos^2\theta + r^2 t\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\ &= r^2 \int_0^\pi \int_0^{2r\theta} t\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t = r^2 \int_0^\pi \left[\int_0^{2r\theta} t\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\theta \\ &= r^2 \int_0^\pi \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2r\theta} \mathrm{d}\theta = 2r^4 \int_0^\pi \theta^2 \mathrm{d}\theta = 2r^4\left[\frac{\theta^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{2}{3}\,\pi^3 r^4\,. \end{aligned}$$

4. (a) Il campo $\mathbf{F}$ è definito su tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$ ed è di classe $\mathscr{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$. Poiché

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xy + z^2 & x^2 + 2yz & 2xz + y^2 \end{vmatrix} = (2y - 2y, -2z + 2z, 2x - 2x) = (0, 0, 0)\,,$$

il campo $\mathbf{F}$ è irrotazionale su $\mathbb{R}^3$. Essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, il campo $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Un potenziale di $\mathbf{F}$ è

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z F_3(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^y x^2\,\mathrm{d}t + \int_0^z (2xt + y^2)\,\mathrm{d}t \\ &= x^2y + y^2z + xz^2\,. \end{aligned}$$

(c) Poiché il campo $\mathbf{F}$ è conservativo, il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ dipende solo dal punto iniziale $P \equiv (1,2,1)$ (ottenuto per $\theta = 0$) e dal punto finale $Q \equiv (2,1,2)$ (ottenuto per $\theta = \pi/2$). Più precisamente, si ha

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = U(Q) - U(P) = U(2,1,2) - U(1,2,1) = 4 + 2 + 8 - 2 - 4 - 1 = 7\,.$$