Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi Matematica 2 **Primo Appello – 19 Luglio 2016**

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________
Nome: ____________________

Es.1: 4 punti	**Es.2**: 5 punti	**Es.3**: 6 punti	**Es.4**: 9 punti	**Es.5**: 9 punti	**Totale**

1. Stabilire se è convergente la serie
$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^n}{3^n n!}\,.$$

2. Stabilire se il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 4x\sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$
ammette un'unica soluzione (locale).

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che
$$D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{4}{\sqrt{3}} \qquad \text{e} \qquad D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \frac{6}{\sqrt{5}}$$
dove
$$\mathbf{u} = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}, \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$
sono due versori di $\mathbb{R}^2$ e dove $\mathbf{x}_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ è un punto di $\mathbb{R}^2$.
   (a) Calcolare il valore delle derivate parziali di f nel punto $\mathbf{x}_0$.
   (b) Calcolare la derivata direzionale $D_{\mathbf{w}} f(\mathbf{x}_0)$ lungo il versore $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (y + 2z, 2x + z, x + 2y)$ lungo la curva γ data dal bordo del triangolo di vertici $A \equiv (1, 0, 0)$, $B \equiv (0, 1, 0)$ e $C \equiv (0, 0, 1)$, orientato da A a B a C.

5. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (xy + xz, xy + yz, xz + yz)$ attraverso la superficie Σ data dal bordo della regione
$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}\,,$$
dove Σ è orientata mediante la normale esterna.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *Due ore.*

Soluzioni

1. Il termine generale della serie è
$$a_n = \frac{n^n}{3^n n!}$$
ed è positivo per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per stabilire il carattere della serie, possiamo utilizzare il criterio del rapporto. Poiché
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}\,\frac{3^n n!}{n^n} = \frac{1}{3}\,\frac{(n+1)^n}{n!}\,\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{\mathrm{e}}{3} < 1 \qquad \text{per } n \to +\infty\,,$$
la serie data converge.

2. L'equazione differenziale è del primo ordine a variabili separabili, dove $a(x) = 4x$ e $b(y) = \sqrt{y}$. Poiché la funzione b non è derivabile in $y_0 = 0$, non possiamo utilizzare il teorema di esistenza ed unicità locale per la soluzione del problema di Cauchy dato. Cerchiamo allora le eventuali soluzioni di tale problema direttamente. Poiché $b(y) = 0$ se e solo se $y = 0$, si ha la soluzione singolare $y(x) = 0$ che soddisfa le condizioni iniziali. Separando le variabili e integrando, si ha
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = 4\int x\,\mathrm{d}x$$
ossia
$$\frac{1}{2}\sqrt{y} = 2x^2 + k \qquad k \in \mathbb{R}$$
ossia
$$\sqrt{y} = x^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}$$
ossia
$$y(x) = (x^2+c)^2 \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$
Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 0$, si ha $c = 0$ e quindi si ha l'ulteriore soluzione $y(x) = x^4$. Pertanto, il problema di Cauchy assegnato ammette almeno due soluzioni.

Osservazione. In realtà, il problema di Cauchy in questione ammette (globalmente) infinite soluzioni (si ha un pennello di Peano). Infatti, per ogni $\alpha \le 0$ e per ogni $\beta \ge 0$, la funzione
$$f_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^4 & x \le \alpha \\ 0 & \alpha \le x \le \beta \\ (x-\beta)^4 & x \ge \beta \end{cases}$$
è di classe $\mathscr{C}^1$ su $\mathbb{R}$ e soddisfa l'equazione differenziale e la condizione iniziale date.

3. (a) Poiché la funzione f è differenziabile, per ogni versore $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ di $\mathbb{R}^2$ vale la formula del gradiente
$$D_{\mathbf{z}} f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{z}\rangle = \alpha z_1 + \beta z_2$$
dove $\alpha = f_x(\mathbf{x}_0)$ e $\beta = f_y(\mathbf{x}_0)$. Pertanto, si ha
$$\begin{cases} D_{\mathbf{u}} f(\mathbf{x}_0) = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\[2ex] D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\,\alpha + \dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\,\beta = \dfrac{4}{\sqrt{3}} \\[2ex] \dfrac{\alpha}{\sqrt{5}} - \dfrac{2\beta}{\sqrt{5}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (1+\sqrt{2})\,\alpha + (1-\sqrt{2})\,\beta = 4\sqrt{2} \\ \alpha - 2\beta = 6\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione, si ha $\alpha = 2\beta + 6$. Sostituendo nella prima equazione e semplificando, si trova $\beta = -2$ e quindi $\alpha = 2$. Pertanto, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}_0) = 2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}_0) = -2\,.$$

(b) Utilizzando ancora la formula del gradiente, essendo f differenziabile, si ha

$$D_{\mathbf{w}} f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{w} \rangle = \langle (2,-2), \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,.$$

4. Per il teorema di Stokes, si ha

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Sigma \langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, d\sigma$$

dove Σ è un'opportuna superficie che ha γ come bordo, orientata in modo che l'orientazione indotta su γ sia l'orientazione assegnata. Nel nostro caso, possiamo scegliere Σ come il triangolo di vertici A, B e C. Posto $\mathbf{x} = B - A = (-1,1,0)$ e $\mathbf{y} = C - A = (-1,0,1)$, il vettore normale a Σ è

$$\mathbf{N} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,1)\,.$$

Pertanto, il versore normale a Σ è

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(1,1,1)\,.$$

Orientando Σ con questo versore, il bordo γ risulta orientato come richiesto.

Inoltre, si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y + 2z & 2x + z & x + 2y \end{vmatrix} = (2-1, -1+2, 2-1) = (1,1,1)\,.$$

Quindi, si ha

$$\langle \operatorname{rot} \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

e

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \sqrt{3} \iint_\Sigma d\sigma = \sqrt{3}\, \mathcal{A}(\Sigma) = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}\, \sqrt{3} = \frac{3}{2}\,.$$

Osservazione. Il lavoro richiesto può anche essere calcolato direttamente. Indicando con γ_1, γ_2 e γ_3 rispettivamente i segmenti AB, BC e AC, si ha

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 1 \\ z' = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = -1 \\ z' = 1 \end{cases}$$

$$\gamma_3 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad t \in [0,1] \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \\ z' = -1\,. \end{cases}$$

Pertanto, si hanno i lavori

$$L_1 = L_{\gamma_1}(\mathbf{F}) = \int_{\gamma_1} \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s} \rangle = \int_0^1 (-t + 2(1-t))\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (2-3t)\ \mathrm{d}t = \left[2t - \frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$L_2 = L_{\gamma_2}(\mathbf{F}) = \int_{\gamma_2} \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s} \rangle = \int_0^1 (-t + 2(1-t))\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (2-3t)\ \mathrm{d}t = \left[2t - \frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$
$$L_3 = L_{\gamma_3}(\mathbf{F}) = \int_{\gamma_3} \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s} \rangle = \int_0^1 (2(1-t) - t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 (2-3t)\ \mathrm{d}t = \left[2t - \frac{3}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

In conclusione, il lavoro totale è

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = \frac{3}{2}\,.$$

5. Il campo $\mathbf{F} = (xy + xz, xy + yz, xz + yz)$ è di classe $\mathscr{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$ e la regine Ω è semplice (essendo la regione interna al paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ delimitata dal piano di equazione $z = 1$). Quindi, per calcolare il flusso

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\ \mathrm{d}\sigma\,,$$

possiamo applicare il teorema della divergenza. Poiché

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = y + z + x + z + x + y = 2(x + y + z)\,,$$

si ha

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 2 \iiint_\Omega (x + y + z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,.$$

Passando alle coordinate cilindriche, si ha che la regione Ω è determinata dalle condizioni $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e $\rho^2 \le t \le 1$. Pertanto, si ha

$$\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{\rho^2}^1 (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + t)\ \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}t \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\int_{\rho^2}^1 (\rho^2\cos\theta + \rho^2\sin\theta + \rho t)\ \mathrm{d}t\right] \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left[\rho^2 t\cos\theta + \rho^2 t\sin\theta + \rho\ \frac{t^2}{2}\right]_{\rho^2}^1 \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2 \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} ((\rho^2 - \rho^4)\cos\theta + (\rho^2 - \rho^4)\sin\theta + \frac{1}{2}\,(\rho - \rho^5))\,\mathrm{d}\theta\right] \mathrm{d}\rho \\
&= 2 \int_0^1 \left[(\rho^2 - \rho^4)\sin\theta - (\rho^2 - \rho^4)\cos\theta + \frac{1}{2}\,(\rho - \rho^5)\theta\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^5)\ \mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^6}{6}\right]_0^1 \\
&= \frac{2}{3}\,\pi\,.
\end{aligned}$$