Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi Matematica 2 — **Secondo Appello – 2 Settembre 2016**

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

Es.1: 5 punti	**Es.2**: 12 punti	**Es.3**: 8 punti	**Es.4**: 8 punti	**Totale**

1. Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2} \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|\,y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$.

   (b) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{0} = (0,0)$. In caso affermativo, calcolare $\nabla f(0,0)$.

   (c) Stabilire per quali versori $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ (con $a^2+b^2=1$) esiste la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ di f in $\mathbf{0} = (0,0)$.

   (d) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbf{0} = (0,0)$.

   (e) Dire se esiste l'integrale doppio

$$I = \iint_\Omega f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$. In caso affermativo, calcolarlo.

3. (a) Mostrare che il campo $\mathbf{F} = (y + \mathrm{e}^z, x + \mathrm{e}^z, (x+y)\,\mathrm{e}^z)$ è conservativo.

   (b) Determinare un potenziale U del campo $\mathbf{F}$.

   (c) Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F}$ lungo la curva γ parametrizzata dalla funzione vettoriale definita da $f(t) = (4-3t, -6+6t-t^2, 5-5t+t^3)$ per $t \in [1,2]$.

4. (a) Mostrare che la superficie

$$\Sigma : \begin{cases} x = t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} t \in [1,2] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{array}$$

   è regolare.

   (b) Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F} = (xz, yz, z)$ attraverso la superficie Σ (orientata mediante l'orientazione indotta dalla parametrizzazione).

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *Due ore.*

Soluzioni

1. Si tratta di una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Non ci sono soluzioni singolari (poiché l'equazione $1+y^2=0$ non ha soluzioni reali). Separando le variabili e integrando, si ha
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
da cui si ricava
$$\operatorname{artg} y = \operatorname{artg} x + c \qquad c \in \mathbb{R}\,.$$
Imponendo la condizione iniziale $y(1)=1$, si ha $\operatorname{artg} 1 = \operatorname{artg} 1 + c$, ossia $c=0$. Pertanto, la soluzione cercata è determinata dalla condizione $\operatorname{artg} y(x) = \operatorname{artg} x$, dalla quale si ha $y(x)=x$.

2. (a) Passando in coordinate polari, si ha
$$|F(\rho,\theta)| = |f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)| = \left|\frac{|\rho\cos\theta|\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2}\right| = \rho|\cos\theta|\sin^2\theta \leq \rho = g(\rho)\,.$$
Poiché $g(\rho)\to 0$ per $\rho\to 0$, si ha che
$$\lim_{\rho\to 0^+} F(\rho,\theta) = 0$$
uniformemente rispetto a θ. Quindi, si ha
$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to 0^+} F(\rho,\theta) = 0 = f(\mathbf{0})$$
ossia si ha che f è continua in $\mathbf{0}$.

(b) La funzione f è derivabile in $\mathbf{0}$ poiché esistono entrambe le derivate parziali
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0\,.\end{aligned}$$
Pertanto, si ha $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

(c) Dato un versore $\mathbf{v}=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ (con $a^2+b^2=1$), si ha
$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{0}+t\mathbf{x})-f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,\frac{|ta|t^2b^2}{t^2(a^2+b^2)} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}\,ab^2\,.$$
Tale limite esiste e vale 0 quando $a=0$ oppure $b=0$, mentre non esiste quando $a\neq 0$ e $b\neq 0$. Infatti, in quest'ultimo caso, si ha
$$\lim_{t\to 0^\pm}\frac{f(\mathbf{0}+t\mathbf{x})-f(\mathbf{0})}{t} = \pm ab^2.$$

(d) La funzione f non è differenziabile in $\mathbf{0}=(0,0)$, poiché non esistono tutte le derivate direzionali $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{0})$.

(e) Poiché la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, è continua anche sull'insieme Ω. Essendo il disco di centro $(0,0)$ e raggio 1, Ω è un compatto (ossia è chiuso e limitato). Di conseguenza, l'integrale I esiste finito. Per calcolarlo, passiamo alle coordinate polari:
$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{|\rho\cos\theta|\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_0^1\rho^2\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}|\cos\theta|\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\cos\theta\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(\left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + \left[\frac{\sin^3\theta}{3}\right]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}\,.\end{aligned}$$

3. (a) Il campo $\mathbf{F} = (y + \mathrm{e}^z, x + \mathrm{e}^z, (x+y)\mathrm{e}^z)$ è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$ ed è irrotazionale su tutto $\mathbb{R}^2$, essendo

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y+\mathrm{e}^z & x+\mathrm{e}^z & (x+y)\mathrm{e}^z \end{vmatrix} = (\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^z, -\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^z, 1-1) = (0,0,0)\,.$$

Poiché $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso, si ha che $\mathbf{F}$ è conservativo.

(b) Un potenziale di $\mathbf{F}$ è dato da

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y F_2(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z F_3(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \mathrm{d}t + \int_0^y (x+1)\,\mathrm{d}t + \int_0^z (x+y)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \\ &= \big[t\big]_0^x + \big[(x+1)t\big]_0^y + \big[(x+y)\mathrm{e}^t\big]_0^z \\ &= x + (x+1)y + (x+y)\mathrm{e}^z - x - y \\ &= xy + (x+y)\mathrm{e}^z\,. \end{aligned}$$

(c) Poiché $\mathbf{F}$ è un campo conservativo, il lavoro richiesto è

$$L\gamma(\mathbf{F}) = U(Q) - U(P)$$

dove $P = f(1) = (1,-1,1)$ e $Q = f(2) = (-2,2,3)$. Quindi, si ha

$$L\gamma(\mathbf{F}) = U(-2,2,3) - U(1,-1,1) = -4 + 1 = -3\,.$$

4. Sia $\Omega = [1,2] \times [0,2\pi]$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la superficie Σ, ossia la funzione $f(t,\theta) = (t\cos\theta, t\sin\theta, \theta)$.

(a) Poiché

$$\begin{cases} x_t = \cos\theta \\ y_t = \sin\theta \\ z_t = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x_\theta = -t\sin\theta \\ y_\theta = t\cos\theta \\ z_\theta = 1 \end{cases}$$

il versore normale a Σ è

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial t} \wedge \frac{\partial f}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -t\sin\theta & t\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\sin\theta, -\cos\theta, t)\,.$$

Quindi, essendo $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$ ed essendo $\|\mathbf{N}\| = \sqrt{1+t^2} \neq 0$ per ogni $(t,\theta) \in \Omega$, la superficie Σ è regolare.

(b) Il flusso del campo $\mathbf{F} = (xz, yz, z)$ attraverso la superficie Σ è

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle\,\mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta$$

dove, nel secondo integrale, si ha

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{N} \rangle = \langle (t\theta\cos\theta, t\theta\sin\theta, \theta), (\sin\theta, -\cos\theta, t) \rangle = t\theta\sin\theta\cos\theta - t\theta\sin\theta\cos\theta + t\theta = t\theta\,.$$

Pertanto, si ha

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega t\theta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta = \int_1^2 \int_0^{2\pi} t\theta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\theta = \int_1^2 t\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} \theta\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi^2\,.$$