Politecnico di Milano – Ingegneria Industriale

Analisi Matematica 2 **Terzo Appello – 30 Gennaio 2017**

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________
Nome: ______________________

Es.1: 4 punti	**Es.2**: 5 punti	**Es.3**: 11 punti	**Es.4**: 12 punti	**Totale**

1. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n+\sqrt{n^4+n}}{(n^3+1)\sqrt{n^2+n+1}}\,.$$

2. Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x = 2\theta\cos\theta \\ y = 2\theta\sin\theta \\ z = \theta^3/3 \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f possiede un punto di minimo assoluto in $\mathbf{0} = (0,0)$.
   (b) Stabilire se f è continua in $\mathbf{0} = (0,0)$.
   (c) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{0} = (0,0)$. In caso affermativo, calcolare $\nabla f(0,0)$.
   (d) Stabilire per quali versori $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ (con $a^2+b^2=1$) esiste la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ di f in $\mathbf{0} = (0,0)$.
   (e) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbf{0} = (0,0)$.

4. (a) Stabilire se il campo $\mathbf{F} = (y^2 + x^2 y, x^2 - xy^2)$ è conservativo.
   (b) Fissato $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, disegnare sul piano l'insieme

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq r^2\,,\ x \leq \sqrt{3}\,y\}\,.$$

   (c) Calcolare il lavoro L del campo $\mathbf{F}$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$ orientata in senso orario.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *Due ore.*

Soluzioni

1. La serie data è a termini positivi, poiché

$$a_n = \frac{n+\sqrt{n^4+n}}{(n^3+1)\sqrt{n^2+n+1}} > 0$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, per $n \to +\infty$, si ha

$$a_n \sim \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}\,.$$

La serie che ha termine generale $1/n^2$ è una serie armonica generalizzata che converge ($\alpha = 2 > 1$). Pertanto, per il criterio del confronto asintotico, anche la serie di partenza converge.

2. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale che parametrizza la curva γ, ossia la funzione definita da $f(\theta) = (2\theta\cos\theta, 2\theta\sin\theta, \theta^3/3)$. Poiché

$$\begin{cases} x' = 2\cos\theta - 2\theta\sin\theta \\ y' = 2\sin\theta + 2\theta\cos\theta \\ z' = \theta^2\,, \end{cases}$$

si ha

$$\|f'(\theta)\| = \sqrt{4+4\theta^2+\theta^4} = 2+\theta^2\,.$$

Poiché $\|f'(\theta)\| \neq 0$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, la curva γ è regolare e

$$L = \int_\gamma \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \|f'(\theta)\|\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (2+\theta^2)\,\mathrm{d}\theta = \left[2\theta + \frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = 4\pi + \frac{8}{3}\,\pi^3\,.$$

3. (a) Poiché $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $f(0, 0) = 0$, la funzione f presenta in $\mathbf{0}$ un punto di minimo relativo. Poiché f si annulla solo in $\mathbf{0}$, tale minimo è assoluto.

   (b) Passando in coordinate polari, essendo $\cos^4\theta + \sin^4\theta = 1 - \frac{1}{2}\,\sin^2 2\theta \leq 1$, si ha

$$|F(\rho,\theta)| = |f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)| = \left|\frac{\rho^4\cos^4\theta + \rho^4\sin^4\theta}{\rho^2}\right| = \rho^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) \leq \rho = g(\rho)\,.$$

   Poiché $g(\rho) \to 0$ per $\rho \to 0^+$, si ha che

$$\lim_{\rho\to 0^+} F(\rho,\theta) = 0$$

   uniformemente rispetto a θ. Quindi, si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = \lim_{\rho\to 0^+} F(\rho,\theta) = 0 = f(\mathbf{0})$$

   ossia si ha che f è continua in $\mathbf{0}$.

   (c) La funzione f è derivabile in $\mathbf{0}$ poiché esistono entrambe le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{x^2}-0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{y^4}{y^2}-0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y} = 0\,.$$

   Pertanto, si ha $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

(d) Dato un versore $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ (con $a^2+b^2=1$), si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{0}+t\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\, \frac{t^4a^4+t^4b^4}{t^2(a^2+b^2)} = \lim_{t\to 0} t(a^4+b^4) = 0\,.$$

Pertanto la funzione f ammette sempre derivata direzionale in $(0,0)$ e

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0}) = 0\,.$$

(e) Per stabilire la differenziabilità della funzione f in $\mathbf{0}$ dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{x}-\mathbf{0}\rangle}{\|\mathbf{x}-\mathbf{0}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,.$$

Passando in coordinate polari, si ha

$$\left| \frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| = \left| \frac{\rho^4\cos^4\theta + \rho^4\sin^4\theta}{\rho^3} \right| \le \rho = g(\rho)$$

Poiché $g(\rho)\to 0$ per $\rho \to 0^+$, si ha che

$$\lim_{\rho\to 0^+} \rho(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0$$

uniformemente rispetto a θ e quindi si ha

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) - \langle \nabla f(\mathbf{0}), \mathbf{x}-\mathbf{0}\rangle}{\|\mathbf{x}-\mathbf{0}\|} = 0\,.$$

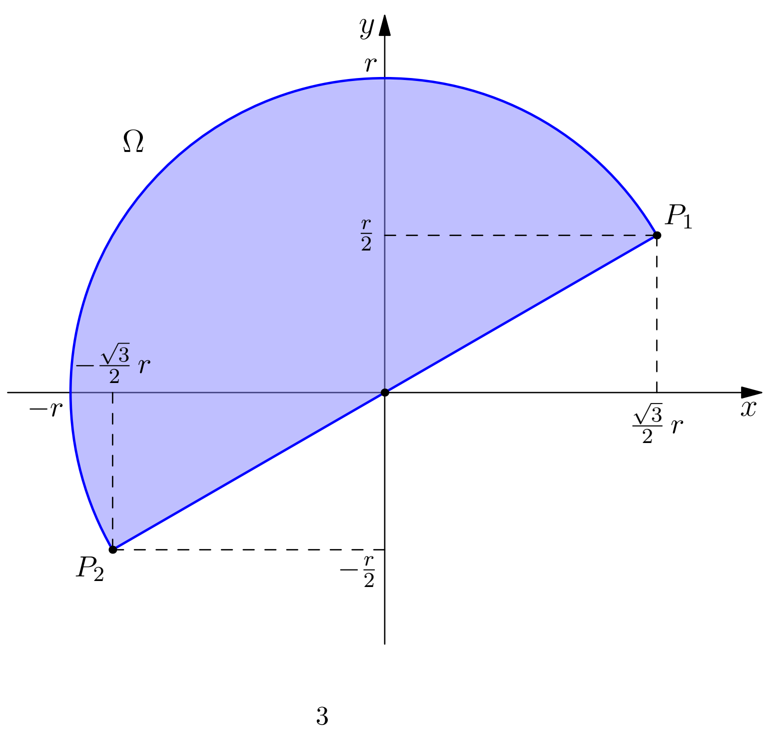
Pertanto, la funzione f è differenziabile in $\mathbf{0}$.

4. (a) Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathscr{C}^\infty$ su tutto $\mathbb{R}$ e

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y + x^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x - y^2\,.$$

Pertanto, essendo $\frac{\partial F_1}{\partial y} \neq \frac{\partial F_2}{\partial x}$, il campo $\mathbf{F}$ non è irrotazionale e quindi nemmeno conservativo.

(b) Intersecando la circonferenza di equazione $x^2+y^2=r^2$ con la retta di equazione $x=\sqrt{3}\,y$, si ottengono i punti $P_1 \equiv (\frac{3}{2}\,r, \frac{r}{2})$ e $P_2 \equiv (-\frac{3}{2}\,r, -\frac{r}{2})$ che corrispondono, rispettivamente, agli angoli $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ e $\theta_2 = \frac{7}{6}\,\pi$. Pertanto,, si ha



(c) Applicando il teorema di Gauss-Green, tenendo conto che la curva $\gamma = \partial\Omega$ è orientata in senso orario, si ha

$$L = L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Omega \left(2y - 2x + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Passando alle coordinate polari, l'insieme Ω è determinato dalle condizioni $0 \le \rho \le r$ e $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{7}{6}\,\pi$. Quindi si ha

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^r \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} (2\rho\sin\theta - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\ \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^r \rho^2 \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} (2\sin\theta - 2\cos\theta + \rho)\mathrm{d}\theta \right] \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^r \rho^2 \Big[-2\cos\theta - 2\sin\theta + \rho\theta \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7}{6}\pi} \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^r \rho^2 \left(-2\cos\frac{7}{6}\pi - 2\sin\frac{7}{6}\pi + \rho\frac{\pi}{6} + 2\cos\frac{\pi}{6} + 2\sin\frac{\pi}{6} - \rho\frac{7}{6}\pi \right) \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^r \rho^2 \left(2(1+\sqrt{3}) + \pi\rho \right) \mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^r (2(1+\sqrt{3})\rho^2 + \pi\rho^3)\mathrm{d}\rho \\
&= \left[\frac{2}{3}\,(1+\sqrt{3})\rho^3 + \frac{1}{4}\,\pi\rho^4 \right]_0^r \\
&= \frac{2}{3}\,(1+\sqrt{3})r^3 + \frac{1}{4}\,\pi r^4\,.
\end{aligned}$$