Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II **Primo compito in itinere – 5 Maggio 2017**

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________
Nome: ____________________

Es.1: 5 punti	**Es.2**: 6 punti	**Es.3**: 9 punti	**Es.4**: 9 punti	**Es.5**: 4 punti	**Totale**

1. Determinare il carattere della serie
$$\sum_{n\geq 0} \frac{2^n (n!)^2}{n^{2n}} \,.$$

2. Calcolare, se esiste, l'integrale improprio
$$I = \int_0^1 \ln \frac{x}{1-x} \, \mathrm{d}x \,.$$

3. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale
$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \mathrm{e}^{3x} + 6x^2 + 2x + 4 \,.$$

4. Sia
$$\gamma : \begin{cases} x = \theta\cos\theta - \sin\theta \\ y = \theta\sin\theta + \cos\theta \\ z = \theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \,.$$
   (a) Mostrare che γ è una curva regolare.
   (b) Determinare i versori della terna intrinseca di γ nel punto P corrispondente a $\theta = \pi$.
   (c) Determinare la massa totale della curva γ rispetto alla densità lineare di massa
$$\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 3z^2 + 3} \,.$$

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita, sull'intervallo $(-\pi, \pi]$, da
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ x & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$
   e sia F la serie di Fourier associata ad f .
   (a) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
   (b) Dire se la serie F converge in media quadratica.
   (c) Stabilire per quali punti $x \in [-\pi, \pi]$ la serie $F(x)$ converge puntualmente e dire a cosa converge.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. La serie è a termini positivi e il termine generale è dato da
$$a_n = \frac{2^n (n!)^2}{n^{2n}}\,.$$
Consideriamo il rapporto
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}(n+1)!^2}{(n+1)^{2n+2}}\,\frac{n^{2n}}{2^n (n!)^2} = \frac{2n^{2n}}{(n+1)^{2n}} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n}.$$
Poiché
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2n} = 2\mathrm{e}^{-2} < 1\,,$$
per il criterio del rapporto si ha che anche la serie di partenza è convergente.

2. La funzione integranda
$$f(x) = \ln\frac{x}{1-x}$$
è definita per
$$\frac{x}{1-x} > 0$$
ossia per $x \in (0,1)$. Per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$, la funzione f è illimitata. Più precisamente, si ha
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty\,.$$
Pertanto, la funzione f presenta una singolarità in entrambi gli estremi dell'intervallo di integrazione e quindi
$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \ln\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{1/2} \ln\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 \ln\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+}\int_\alpha^{1/2} \ln\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x + \lim_{\beta\to 1^-}\int_{1/2}^\beta \ln\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$
Integrando per parti, si ha
$$\begin{aligned} \int \ln\frac{x}{1-x}\,\mathrm{d}x &= x\ln\frac{x}{1-x} - \int x\,\frac{1-x}{x}\,\frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln\frac{x}{1-x} - \int \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x \\ &= x\ln\frac{x}{1-x} - \ln\frac{1}{1-x} + c \qquad (c\in\mathbb{R})\,. \end{aligned}$$
Pertanto, si ha
$$\begin{aligned} I &= \lim_{\alpha\to 0^+}\left[x\ln\frac{x}{1-x} - \ln\frac{1}{1-x}\right]_\alpha^{1/2} + \lim_{\beta\to 1^-}\left[x\ln\frac{x}{1-x} - \ln\frac{1}{1-x}\right]_{1/2}^\beta \\ &= \lim_{\alpha\to 0^+}\left(-\ln 2 - \alpha\ln\frac{\alpha}{1-\alpha} + \ln\frac{1}{1-\alpha}\right) + \lim_{\beta\to 1^-}\left(\beta\ln\frac{\beta}{1-\beta} - \ln\frac{1}{1-\beta} + \ln 2\right) \\ &= -\ln 2 + \ln 2 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Osservazione. La funzione f è simmetrica rispetto al punto $(x_0, 0)$, dove $x_0 = 1/2$. Infatti, per ogni $x \in (0,1)$, si ha

$$f(2x_0 - x) = f(1-x) = \ln \frac{1-x}{x} = -\ln \frac{x}{1-x} = -f(x)\,.$$

Di conseguenza, l'integrabilità di f per $x \to 0^+$ è equivalente all'integrabilità di f per $x \to 1^-$. Per $x \to 0^+$, la funzione f è negativa e

$$f(x) = \ln \frac{x}{1-x} \sim \ln x\,.$$

Poiché la funzione $\ln x$ è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$, per il criterio del confronto asintotico anche la funzione f è integrabile in senso improprio per $x \to 0^+$. In conclusione, f è integrabile sull'intervallo $(0,1)$ ed è simmetrica rispetto al suo punto medio. Di conseguenza $I = 0$.

3. L'equazione data è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ dell'equazione omogenea ammette due soluzioni reali e distinte $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è

$$y_{om}(x) = c_1 \mathrm{e}^{2x} + c_2 \mathrm{e}^{3x} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione differenziale completa, useremo il principio di sovrapposizione. Iniziamo a considerare l'equazione

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = \mathrm{e}^{3x}\,.$$

Poiché $\lambda = 3$ è una soluzione semplice dell'equazione caratteristica dell'omogenea, per il metodo di somiglianza si ha una soluzione particolare del tipo $\overline{y}_1(x) = Ax\mathrm{e}^{3x}$. Derivando successivamente, si ha $\overline{y}_1'(x) = A\mathrm{e}^{3x} + 3Ax\mathrm{e}^{3x}$ e $\overline{y}_1''(x) = 6A\mathrm{e}^{3x} + 9Ax\mathrm{e}^{3x}$. Sostituendo nell'equazione differenziale considerata, si ha

$$6A\mathrm{e}^{3x} + 9Ax\mathrm{e}^{3x} - 5(A\mathrm{e}^{3x} + 3Ax\mathrm{e}^{3x}) + 6Ax\mathrm{e}^{3x} = \mathrm{e}^{3x}\,.$$

Dividendo per l'esponenziale (che è sempre positivo) e semplificando, si ha $A = 1$. Pertanto, la soluzione particolare cercata è

$$\overline{y}_1(x) = x\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Consideriamo ora l'equazione differenziale

$$y''(x) - 5y'(x) + 6y(x) = 6x^2 + 2x + 4\,.$$

Poiché $\lambda = 0$ non è una dell'equazione caratteristica dell'omogenea, per il metodo di somiglianza si ha una soluzione particolare del tipo $\overline{y}_2(x) = ax^2 + bx + c$. Derivando successivamente, si ha $\overline{y}_2'(x) = 2ax + b$ e $\overline{y}_2''(x) = 2a$. Sostituendo nell'equazione differenziale considerata, si ha

$$2a - 5(2ax + b) + 6(ax^2 + bx + c) = 6x^2 + 2x + 4$$

ossia

$$6ax^2 + (-10a + 6b)x + 2a - 5b + 6c = 6x^2 + 2x + 4$$

ossia

$$\begin{cases} 6a = 6 \\ -10a + 6b = 2 \\ 2a - 5b + 6c = 4 \end{cases}$$

da cui si ricava $a = 1$, $b = 2$ e $c = 2$. Pertanto, la soluzione particolare cercata è

$$\overline{y}_2(x) = x^2 + 2x + 2 .$$

Di conseguenza, una soluzione particolare dell'equazione completa di partenza è

$$\overline{y}(x) = \overline{y}_1(x) + \overline{y}_2(x) = x\mathrm{e}^{3x} + x^2 + 2x + 2 .$$

In conclusione, l'integrale generale dell'equazione differenziale completa è

$$y(x) = y_{om}(x) + \overline{y}(x) = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^{3x} + x^2 + 2x + 2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

4. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ la funzione vettoriale, definita da $f(\theta) = (\theta\cos\theta - \sin\theta, \theta\sin\theta + \cos\theta, \theta)$, che parametrizza la curva γ. In particolare, si ha

$$\begin{cases} x' = -\theta\sin\theta \\ y' = \theta\cos\theta \\ z' = 1 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x'' = -\sin\theta - \theta\cos\theta \\ y'' = \cos\theta - \theta\sin\theta \\ z'' = 0 , \end{cases}$$

   (a) Poiché $z'(\theta) = 1 \neq 0$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$, la curva γ è regolare.

   (b) Si ha $P = f(\pi) \equiv (-\pi, -1, \pi)$, $f'(\pi) = (0, -\pi, 1)$ e $f''(\pi) = (\pi, -1, 0)$. Pertanto, si ha

$$f'(\pi) \wedge f''(\pi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & -\pi & 1 \\ \pi & -1 & 0 \end{vmatrix} = (1, \pi, \pi^2) .$$

   Abbiamo così i versori

$$\mathbf{t}(\pi) = \frac{f'(\pi)}{\|f'(\pi)\|} = \frac{(0, -\pi, 1)}{\sqrt{1+\pi^2}}$$
$$\mathbf{b}(\pi) = \frac{f'(\pi) \wedge f''(\pi)}{\|f'(\pi) \wedge f''(\pi)\|} = \frac{(1, \pi, \pi^2)}{\sqrt{1+\pi^2+\pi^4}} .$$

   Infine, si ha

$$\mathbf{n}(\pi) = \mathbf{b}(\pi) \wedge \mathbf{t}(\pi) = \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}} \frac{1}{\sqrt{1+\pi^2+\pi^4}} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & \pi & \pi^2 \\ 0 & -\pi & 1 \end{vmatrix} = \frac{(\pi+\pi^3, -1, -\pi)}{\sqrt{(1+\pi^2)(1+\pi^2+\pi^4)}} .$$

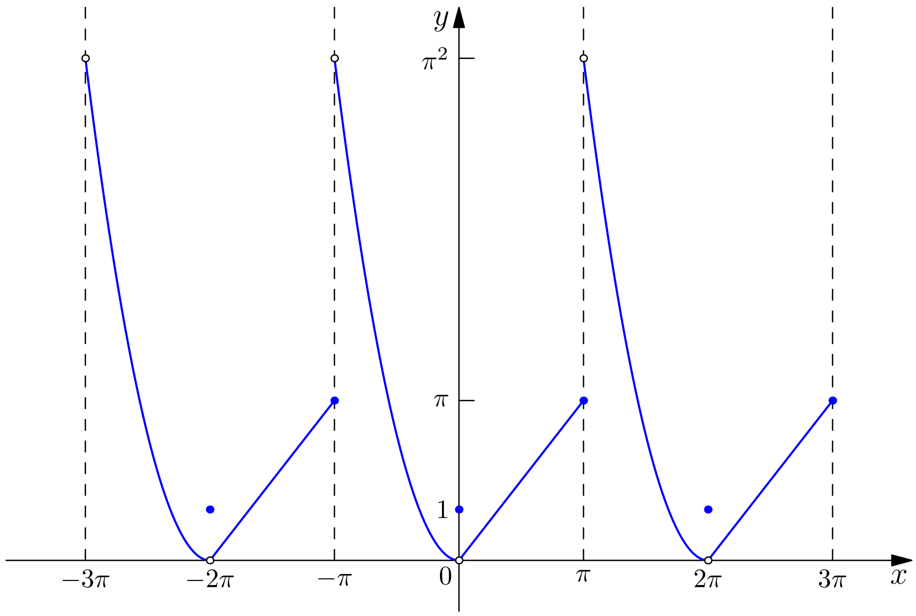
   (c) La massa totale della curva γ è

$$M = \int_\gamma \delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \delta(t) \, \|f'(t)\| \, \mathrm{d}t .$$

   Poiché $\|f'(\theta)\| = \sqrt{1+\theta^2}$ e $\delta(\theta) = 2\sqrt{1+\theta^2}$, si ha

$$M = 2\int_0^{2\pi} (1+\theta^2) \, \mathrm{d}\theta = 2\left[\theta + \frac{\theta^3}{3}\right]_0^{2\pi} = 2\left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\,(3+4\pi^2) .$$

5. (a) Il grafico di f sull'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$ è



(b) Poiché la funzione f è di classe L^2 su $[-\pi, \pi]$, ossia $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx < +\infty$, la serie di Fourier F converge in media quadratica.

(c) Poiché la funzione f è regolare a tratti sull'intervallo $[-\pi, \pi]$, la serie di Fourier $F(x)$ converge puntualmente per ogni $x \in [-\pi, \pi]$ (e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$). In particolare, essendo f continua in ogni punto $x \in (-\pi, \pi)$, $x \neq 0$, la serie di Fourier $F(x)$ converge ad $f(x)$ in tutti questi punti. Inoltre, poiché f presenta un salto finito per $x_0 = 0, \pm\pi$, la serie di Fourier $F(x)$ converge alla media dei limiti destro e sinistro, ossia

$$F(x_0) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} .$$

Più precisamente, si ha $F(0) = 0$ e $F(\pm\pi) = \dfrac{\pi + \pi^2}{2}$.

Osservazione. Il polinomio di Fourier $F_{20}(x)$ dà la seguente approssimazione di f: