Politecnico di Milano
Ingegneria Industriale e dell'Informazione

Analisi Matematica II — **Secondo compito in itinere – 7 Luglio 2017**

Cognome: ______________________ **Matricola:** ______________________

Nome: ______________________

Es.1: 9 punti	**Es.2**: 8 punti	**Es.3**: 9 punti	**Es.4**: 7 punti	**Totale**

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Stabilire se f è continua in $\mathbf{0} \equiv (0,0)$.
   (b) Stabilire se f è derivabile in $\mathbf{0}$. In caso affermativo, calcolare il gradiente $\nabla f(\mathbf{0})$.
   (c) Stabilire lungo quali versori $\mathbf{v} = (a,b)$, $a^2+b^2=1$, esiste la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$.
   (d) Stabilire se f è differenziabile in $\mathbf{0}$.
   (e) Stabilire se $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
   (f) Stabilire se $\mathbf{0}$ è un punto critico per f. In caso affermativo, stabilire la natura di tale punto critico.

2. Sia $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$q(x,y) = x^2 - 6xy - 7y^2 \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

   (a) Classificare q.
   (b) Determinare il valore minimo assoluto ed il valore massimo assoluto che q assume sul vincolo $\gamma : x^2+y^2=1$. Determinare inoltre i punti di γ in cui q assume tali valori.

3. Sia Σ la superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u^2+v^2 \\ y = u^2-v^2 \\ z = 2uv \end{cases} \qquad (u,v) \in \Omega$$

   dove

$$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -v \le u \le v\,,\; 1 \le u^2+v^2 \le 4\,,\; v \ge 0\}.$$

   (a) Disegnare l'insieme Ω nel piano uv dei parametri.
   (b) Stabilire se Σ è una superficie regolare.
   (c) Calcolare l'area di Σ.

4. Calcolare il lavoro del campo $\mathbf{F} = (x^2-y^2+1, x^2+y^2-1)$ lungo la curva $\gamma = \partial\Omega$, orientata positivamente, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}\,x\,,\; x^2+y^2 \le r^2\,,\; x \ge 0\,,\; y \ge 0\right\}.$$

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

   (a) Passando in coordinate polari si ha

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{\rho^5 \cos^3\theta \sin^2\theta}{\rho^4} \right| = \rho \left|\cos^3\theta \sin^2\theta\right| \leq \rho \to 0 \qquad \text{per } \rho \to 0\,.$$

   Pertanto $F(\rho,\theta)$ converge a 0 uniformemente rispetto a θ e quindi

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0})\,,$$

   ossia f è continua in $\mathbf{0}$.

   (b) la funzione f è derivabile in $\mathbf{0}$ poiché

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0\,. \end{aligned}$$

   In particolare, il gradiente è $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

   (c) Sia $\mathbf{v} = (a,b)$, $a^2+b^2 = 1$. Allora

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t\mathbf{v}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(ta,tb)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\frac{t^5a^3b^2}{t^4(a^2+b^2)^2} = a^3b^2\,.$$

   Pertanto, la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$ esiste lungo ogni versore $\mathbf{v}$.

   (d) La funzione f non è differenziabile in $\mathbf{0}$. Infatti, se fosse differenziabile, allora dovrebbe valere la formula del gradiente $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0}) = \langle \nabla f(0,0), \mathbf{v}\rangle$, per ogni versore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, ossia dovrebbe essere $a^3b^2 = 0$, per ogni $a,b \in \mathbb{R}^2$, $a^2+b^2 = 1$.

   (e) Si ha $f \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Infatti, in caso contrario, la funzione f sarebbe differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$ (per il teorema del differenziale totale), mentre f non è differenziabile in $\mathbf{0}$.

   (f) Poiché f è derivabile in $\mathbf{0}$ e $\nabla f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{0}$ è un punto critico per f. Più precisamente, $\mathbf{0}$ è un punto di sella. Infatti, $f(\mathbf{0}) = 0$ e il segno di $f(\mathbf{x})$ è determinato dal segno del numeratore: $f(x,y) > 0$ per ogni $x > 0$, $y \neq 0$, $f(x,y) < 0$ per ogni $x < 0$, $y \neq 0$, $f(x,y) = 0$ quando $x = 0$ o $y \neq 0$. Pertanto, in un qualunque intorno di $\mathbf{0}$ ci sono sempre punti in cui $f(\mathbf{x}) > 0$ e punti in cui $f(\mathbf{x}) < 0$.

2. (a) La matrice che rappresenta q è

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}.$$

   Poiché $|A| = -7 - 9 = -16 < 0$, q è una forma quadratica indefinita.

   (b) La forma quadratica q è una funzione continua su γ e γ è un compatto. Quindi, per il teorema di Weierstrass, q possiede massimo e minimo assoluti su γ. Per determinare tali valori, possiamo procedere nei modi seguenti.

   Primo modo (algebrico). Poiché $\gamma = S^1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \|\mathbf{x}\| = 1\}$, la forma quadratica q assume i suoi valori massimi e minimi assoluti in corrispondenza dell'autovalore massimo e dell'autovalore minimo. Poiché

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ 3 & \lambda + 7 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda - 16 = (\lambda+8)(\lambda-2)\,,$$

gli autovalori di q sono $\lambda_1 = -8$ e $\lambda_2 = 2$. Quindi, il valore minimo di q è $\lambda_1 = -8$ e il valore massimo è $\lambda_2 = 2$. Per determinare i punti in cui tali valori vengono assunti basta determinare gli autospazi di q e intersecarli con il vincolo γ. Gli autospazi sono

$$V_{-8} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y = 3x\} = \langle (1,3) \rangle$$
$$V_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x = -3y\} = \langle (3,-1) \rangle\,.$$

Pertanto, i punti di minimo sono dati dai punti

$$P_{1,2} \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{10}}\,(1,3)$$

mentre i punti di massimo sono dati dai punti

$$Q_{1,2} \equiv \pm \frac{1}{\sqrt{10}}\,(3,-1)\,.$$

Secondo modo (analitico). Poiché la funzione q è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ (essendo un polinomio) e il vincolo γ è regolare, i punti critici di q vincolati a γ sono da cercarsi tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} q'_x(x,y)g'_y(x,y) - q'_y(x,y)g'_x(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

ossia

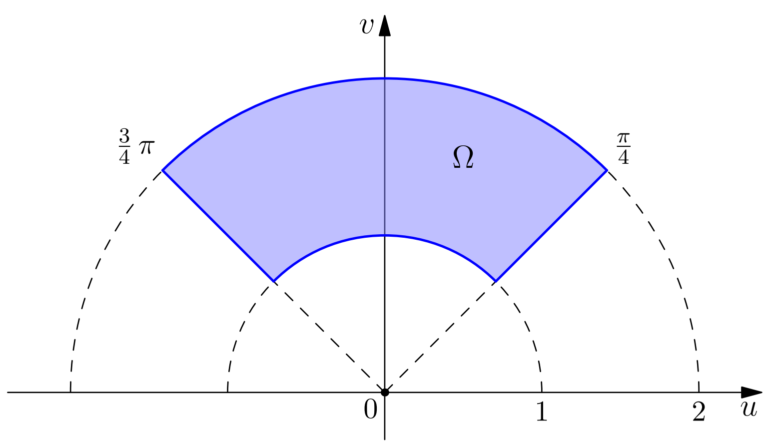
$$\begin{cases} 3x^2 + 8xy - 3y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Consideriamo la prima equazione $3y^2 - 8xy - 3x^2 = 0$ come un'equazione in y. Allora, le radici sono

$$y = \frac{4x \pm \sqrt{16x^2 + 9x^2}}{3} = \frac{4x \pm 5x}{3}$$

da cui si ha $y = 3x$ oppure $y = -\frac{1}{3}\,x$. Intersecando queste due rette con il vincolo γ si riottengono i punti $P_{1,2}$ e $Q_{1,2}$. Infine, valutando q in tali punti si ritrovano i valori massimi e minimi di q ottenuti in precedenza.

3. (a) L'insieme Ω è



(b) Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ la funzione, definita da

$$f(u,v) = (u^2 + v^2, u^2 - v^2, 2uv) \qquad \forall (u,v) \in \Omega\,,$$

che dà la parametrizzazione di Σ. Allora, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (2u, 2u, 2v) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = (2v, -2v, 2u)\,.$$

Quindi, il vettore normale è

$$\mathbf{N} = \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 2u & 2v \\ 2v & -2v & 2u \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u & u & v \\ v & -v & u \end{vmatrix} = 4(u^2+v^2, -u^2+v^2, -2uv)$$

e

$$\|\mathbf{N}\| = 16\sqrt{(u^2+v^2)^2 + (-u^2+v^2)^2 + 4u^2v^2} = 16\sqrt{2(u^4+2u^2v^2+v^4)} = 16\sqrt{2}\,(u^2+v^2)\,.$$

Pertanto, $\|\mathbf{N}(u,v)\| = 0$ se e solo se $(u,v) = (0,0)$. Poiché $O \notin \Omega$, si ha $\|\mathbf{N}(u,v)\| \neq 0$ per ogni $(u,v) \in \Omega$, ossia la superficie Σ è regolare.

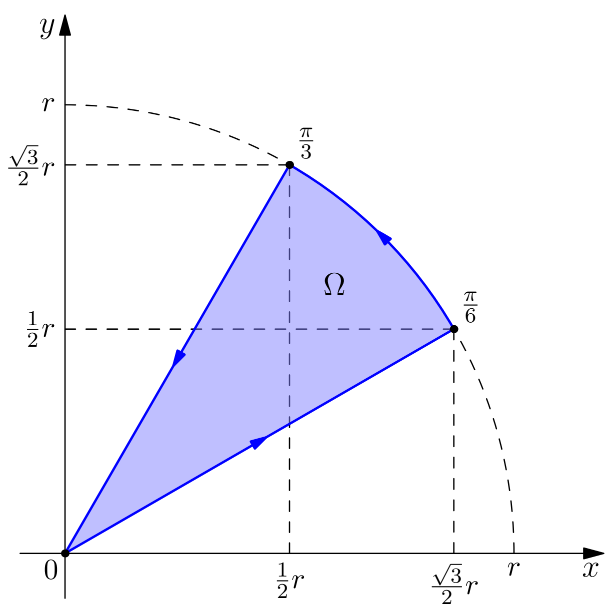
(c) L'area di Σ è

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma = \iint_\Omega \|\mathbf{N}\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 16\sqrt{2} \iint_\Omega (u^2+v^2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,.$$

Passando alle coordinate polari, si ha che Ω è descritto dalle condizioni $1 \leq \rho \leq 2$ e $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3}{4}\pi$, e pertanto

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_1^2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \int_1^2 \rho^2\,\mathrm{d}\rho \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{15}{\sqrt{2}}\,\pi\,.$$

4. Poiché $\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ e l'insieme Ω



è semplice, possiamo utilizzare il teorema di Gauss-Green:

$$L_\gamma(\mathbf{F}) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_\Omega (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Passando in coordinate polari, l'insieme Ω è determinato dalle condizioni $0 \le \rho \le r$ e $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{3}$. Quindi, si ha

$$
\begin{aligned}
L_\gamma(\mathbf{F}) &= 2\int_0^r \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta)\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta = 2\int_0^r \rho^2\, \mathrm{d}\rho \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos\theta + \sin\theta)\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r \Big[\sin\theta - \cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2}{3}\,(\sqrt{3}-1)\, r^3 \,.
\end{aligned}
$$