Analisi Matematica II — **Primo appello – 24 Luglio 2017**

Cognome: ____________________ **Matricola:** ____________________

Nome: ____________________

Es.1: 5 punti	**Es.2**: 10 punti	**Es.3**: 12 punti	**Es.4**: 6 punti	**Totale**

1. Stabilire se la serie
$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{n^{2n}}{2^{2n}(2n)!}$$
   (a) converge assolutamente
   (b) converge semplicemente.

2. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x,y)=(x^2+y^2)\,\mathrm{e}^{x-y}\qquad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\,.$$
   (a) Scrivere l'equazione del piano tangente di f per $\mathbf{x}_0=(1,1)$.
   (b) Calcolare la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0)$ lungo il versore $\mathbf{v}=(\frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}})$.
   (c) Determinare i punti di massimo e minimo liberi di f.
   (d) Determinare i punti di massimo e minimo di f vincolati alla curva $\gamma\,:\,x^2+y^2=1$.

3. (a) Stabilire se la curva
$$\gamma:\begin{cases}x=\cos\theta\\ y=\sin\theta\\ z=\cos\theta+\sin\theta\end{cases}\qquad\theta\in[0,2\pi]$$
   è regolare.
   (b) Si consideri la curva γ come un filo materiale di densità lineare di massa $\delta(x,y)=\sqrt{1-xy}$.
      i. Calcolare la massa totale M di γ.
      ii. Calcolare il momento di inerzia I_z di γ rispetto all'asse z.
      iii. Calcolare il raggio di inerzia $r_I=\sqrt{\frac{I_z}{M}}$ di γ rispetto all'asse z.
   (c) Sia $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da $\mathbf{F}=(y,-x,z)$.
      i. Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.
      ii. Stabilire se $\mathbf{F}$ è un campo conservativo.
      iii. Sia Σ una superficie regolare semplice orientabile di classe $\mathcal{C}^2$ tale che $\gamma=\partial\Sigma$. Supponiamo che Σ sia orientata in modo che l'orientazione indotta sul bordo $\partial\Sigma$ sia contrario a quello indotto su γ dalla parametrizzazione data. Calcolare l'integrale di superficie
$$I=\iint_\Sigma\langle\operatorname{rot}\mathbf{F},\mathbf{n}\rangle\mathrm{d}\sigma\,.$$

4. Calcolare il flusso del campo $\mathbf{F}=(xy+\mathrm{e}^{yz},\mathrm{e}^x+yz,xz+\sin y)$ attraverso la superficie Σ data dal bordo della regione
$$\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,:\,x^2+y^2+z^2\leq r^2\,,\;y\geq 0\,,\;z\geq 0\}\,,$$
dove Σ è orientata mediante la normale esterna.

Istruzioni. *Ogni risposta deve essere giustificata. Il testo del compito deve essere consegnato insieme alla bella, mentre i fogli di brutta non devono essere consegnati. Durante la prova non è consentito l'uso di libri, quaderni, calcolatrici e apparecchiature elettroniche.*

Tempo. *2 ore.*

Soluzioni

1. (a) Si tratta di una serie a termini con segni alterni $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, dove

$$a_n = \frac{n^{2n}}{2^{2n}(2n)!}\,.$$

Consideriamo il rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{2n+2}}{2^{2n+2}(2n+2)!}\,\frac{2^{2n}(2n)!}{n^{2n}} = \frac{1}{2^2}\,\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{2n} = \frac{1}{8}\,\frac{n+1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{8}\,\frac{n+1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \frac{\mathrm{e}^2}{16} = \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^2 < 1\,,$$

per il criterio del rapporto si ha che la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ è convergente. Quindi, la serie di partenza converge assolutamente.

Osservazione. Usando la formula di Stilring, si ha

$$a_n \sim \frac{n^{2n}}{2^{2n}(2n)^{2n}\mathrm{e}^{-2n}\sqrt{4n\pi}} = \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{2n}\frac{1}{2\sqrt{n\pi}} \leq \left(\frac{\mathrm{e}}{4}\right)^{2n}$$

definitivamente. Poiché $(e/4)^{2n}$ è il termine generale di una serie geometrica convergente (essendo $q = (e/4)^2$ e $0 < q < 1$), per il criterio del confronto semplice e del confronto asintotico, si ha che anche la serie $\sum_{n\geq 0} a_n$ è convergente. Quindi, ritroviamo che la serie di partenza converge assolutamente.

(b) Poiché converge assolutamente, la serie converge anche semplicemente.

2. (a) La funzione f è differenziabile su tutto $\mathbb{R}^2$. Quindi, l'equazione del piano tangente di f in $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ è $z - f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} - \mathbf{x}_0\rangle$. Si ha $f(\mathbf{x}_0) = f(1,1) = 2$. Inoltre, le derivate parziali di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{x-y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = (2y - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{x-y}$$

e

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (4,0)\,.$$

Pertanto, l'equazione del piano tangente cercato è $z - 2 = 4(x-1)$, ossia $4x - z - 2 = 0$.

(b) Poiché f è differenziabile in $\mathbf{x}_0$, vale la formula del gradiente. Quindi, si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{x}_0) = \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \mathbf{v}\rangle = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,.$$

(c) I punti critici di f sono i punti che si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} (2x + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{x-y} = 0 \\ (2y - x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{x-y} = 0 \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = -2x \\ x^2 + y^2 = 2y\,. \end{cases}$$

Confrontando le due equazioni, si ha $y = -x$. Sostituendo nella prima equazione, si ha $2x^2 = -2x$, da cui si ricava $x = 0$ o $x = -1$. Pertanto, si hanno i due punti critici $O \equiv (0,0)$ e $A \equiv (-1,1)$. Per determinare la natura di questi punti, calcoliamo la matrice hessiana di f . Le derivate parziali seconde sono

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (2 + 4x + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -(2x - 2y + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{x-y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (2 - 4y + x^2 + y^2)\,\mathrm{e}^{x-y}\,.$$

Pertanto, si ha

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice hessiana è definita positiva (avendo due autovalori positivi), la funzione f ha un punto di minimo in $(0,0)$.

Inoltre, si ha

$$H(-1,1) = \begin{bmatrix} 0 & 2e^{-2} \\ 2e^{-2} & 0 \end{bmatrix}$$

Poiché la matrice hessiana è indefinita (avendo determinante negativo), la funzione f ha un punto di sella in $(-1,1)$.

(d) Poiché la funzione f è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^2$ e il vincolo γ è regolare, i punti critici di f vincolati a γ sono da cercarsi tra le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f'_x(x,y)g'_y(x,y) - f'_y(x,y)g'_x(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

dove $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. La prima condizione diventa

$$(2x + x^2 + y^2)\, e^{x-y} 2y - (2y - x^2 - y^2)\, e^{x-y} 2x = 0$$

ossia

$$2xy + x^2y + y^3 - 2xy + x^3 + xy^2 = 0$$

ossia

$$x^3 + x^2y + y^3 + xy^2 = 0$$

ossia

$$x^2(x+y) + y^2(y+x) = 0$$

ossia

$$(x^2+y^2)(x+y) = 0\,.$$

Si ha pertanto il sistema

$$\begin{cases} y = -x \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

da cui si ottengono i due punti $P_1 \equiv (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $P_2 \equiv (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Poiché

$$f\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = e^{-\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = e^{\sqrt{2}}\,,$$

si ha che P_1 è un punto di minimo (assoluto) e P_2 è un punto di massimo (assoluto).

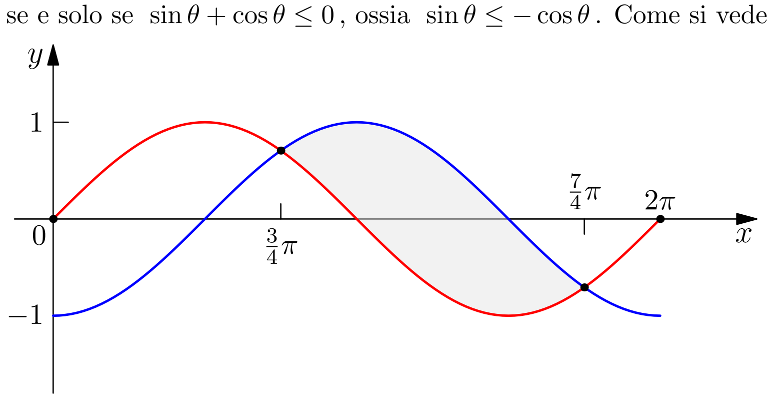
Osservazione Si poteva procedere anche in modo diretto considerando la parametrizzazione della circonferenza $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$. Si ottiene così la funzione $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(\theta) = f(\cos\theta, \sin\theta) = e^{\cos\theta - \sin\theta}\,.$$

Poiché

$$g'(\theta) = -(\sin\theta + \cos\theta)\, e^{\cos\theta - \sin\theta}\,,$$

si ha $g'(\theta) \geq 0$ se e solo se $\sin\theta + \cos\theta \leq 0$, ossia $\sin\theta \leq -\cos\theta$. Come si vede dalla figura



questo accade se e solo se $\frac{3}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{7}{4}\pi$. Di conseguenza, si ha un punto di minimo per $\theta = \frac{3}{4}\pi$ e si ha un punto di massimo per $\theta = \frac{7}{4}\pi$. In particolare, per $\theta = \frac{3}{4}\pi$ si ha il punto $P_1 \equiv (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ mentre per $\theta = \frac{7}{4}\pi$ si ha il punto $P_2 \equiv (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

3. (a) Poiché

$$\begin{cases} x' = -\sin\theta \\ y' = \cos\theta \\ z' = -\sin\theta + \cos\theta \, , \end{cases}$$

si ha $\|f'(\theta)\| = \sqrt{2 - 2\sin\theta\cos\theta} = \sqrt{2 - \sin 2\theta} \neq 0$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$. Quindi γ è regolare.

(b) i. Poiché $\delta(\theta) = \sqrt{1 - \sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 - \sin 2\theta}$, la massa totale di γ è

$$\begin{aligned} M &= \int_\gamma \delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \delta(\theta) \, \|f'(\theta)\| \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - \sin 2\theta}\sqrt{2 - \sin 2\theta} \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (2 - \sin 2\theta) \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(4\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2\sqrt{2}\,\pi \, . \end{aligned}$$

ii. Il momento di inerzia di curva γ rispetto all'asse z è

$$I_z(\gamma) = \int_\gamma (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}s = \int_\gamma \delta \, \mathrm{d}s = M = 2\sqrt{2}\,\pi \, .$$

iii. Il raggio di inerzia è $r_I = 1$.

(c) i. Il lavoro di $\mathbf{F} = (y, -x, z)$ lungo γ è

$$\begin{aligned} L_\gamma(\mathbf{F}) &= \int_\gamma \langle \mathbf{F}, \mathrm{d}\mathbf{s} \rangle = \int_\gamma y \mathrm{d}x - x \mathrm{d}y + z \mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta - \cos^2\theta + (\cos\theta + \sin\theta)(-\sin\theta + \cos\theta)) \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-1 + \cos^2\theta - \sin^2\theta) \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (-1 + \cos 2\theta) \, \mathrm{d}\theta \\ &= \left[-\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} = -2\pi \, . \end{aligned}$$

ii. Poiché γ è una curva chiusa e $L_\gamma(\mathbf{F}) \neq 0$, $\mathbf{F}$ non è un campo conservativo.

iii. Per il teorema di Stokes, si ha $I = -L_\gamma(\mathbf{F}) = 2\pi$.

4. Il campo $\mathbf{F}$ è di classe $\mathcal{C}^1$ su tutto $\mathbb{R}^3$ e la regione Ω è semplice (essendo la parte interna alla sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ contenuta nel primo e secondo ottante). Quindi, per calcolare il flusso

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iint_\Sigma \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \, \mathrm{d}\sigma \, ,$$

possiamo applicare il teorema della divergenza. Poiché $\operatorname{div} \mathbf{F} = x + y + z$, si ha

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \iiint_\Omega (x + y + z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \, .$$

Passando alle coordinate sferiche, la regione Ω è determinata dalle condizioni $0 \le \rho \le r$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ e $0 \le \theta \le \pi$. Pertanto, si ha

$$
\begin{aligned}
\Phi_\Sigma(\mathbf{F}) &= \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} (\rho \sin\varphi \cos\theta + \rho \sin\varphi \sin\theta + \rho \cos\varphi)\, \rho^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^r \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} (\sin^2\varphi \cos\theta + \sin^2\varphi \sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{r^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big[\sin^2\varphi \sin\theta - \sin^2\varphi\cos\theta + \theta \sin\varphi\cos\varphi\Big]_0^{\pi} \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{r^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(2\sin^2\varphi + \frac{\pi}{2}\sin 2\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{r^4}{4} \Big[\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \frac{\pi}{4}\cos 2\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{4} r^4 .
\end{aligned}
$$